CASOS DE TORSIÓN Y FLEXIÓN COMBINADAS EN PIEZAS CURVAS DE HORMIGÓN

por José M.ª Marchesi, ingeniero agrónomo. Profesor de la Escuela del Cuerpo.

En la Arquitectura moderna se presentan cada vez más frecuentemente vigas que por formar voladizos de importancia curvos o rectos, en anfiteatros, balcones o loggias, o por establecer en ellos huecos en los ángulos, como es corriente en el estilo moderno, exigen un complicado cálculo de aquéllas, por estar sometidas a esfuerzos combinados de flexión y torsión, cálculo que consideramos interesante consignar, siquiera sea en sus líneas más generales. Comenzaremos por recordar que la torsión puede considerarse como un caso particular del esfuerzo cortante, en el que el desplazamiento de las moléculas se verifica por una rotación alrededor de un punto de la sección, en vez de realizarse por uno de traslación, razón por la cual debe reemplazarse en las fórmulas generales de la flexión por el momento de inercia polar, los momentos de inercia correspondientes a los dos planos de simetría de la sección, o *momentos ecuatoriales*. El valor de aquél es:

$$I_p = I_x + I_y$$

y la torsión puede asimilarse a un *esfuerzo cortante circular,* cuyo coeficiente de trabajo debe ser análogo al de aquél, y que se fija para el hormigón en 4 k^os^ por centímetro cuadrado en las Instrucciones modernas de ejecución de obras de hormigón armado, siendo el módulo de torsión o momento resistente en una pieza de sección regular, igual al duplo del menor módulo de flexión, como fácilmente demuestra la Estática. Conviene también tener presente que la relación entre los coeficientes de elasticidad transversal y longitudinal es de 2,2 a 2,5, según la clase de material, aceptándose usualmente el primero, establecido por *Bach,* cuando se trata de hormigón armado. La torsión puede ser *simple* o *compuesta,* presentándose la primera frecuentemente en Mecánica, pero raramente en Construcción, en donde aparece en muchos casos la segunda, que es de la única de que nos ocuparemos. Para que un prisma empotrado por un extremo experimente una torsión compuesta, es preciso que la fuerza exterior actuante o la resultante de ellas se encuentren contenidas, y con cualquier inclinación, en un plano perpendicular al eje del prisma; pero con la precisa condición de que aquéllas no corten al eje citado, circunstancia precisa para que aparezcan los momentos de torsión. Supongamos el prisma de la figura 1.ª sometido en su extremo libre a la acción de una fuerza P_1 situada en el plano de la seción extrema de aquél. El equilibrio no se altera, si introducimos en el centro de gravedad de dicha sección dos fuerzas opuestas iguales y paralelas a P_1, que serán las P_2, fuerzas que originan un momento de torsión $(P_1-P_2)d$ y un esfuerzo de flexión que producirá la fuerza restante P_2. Si trasladamos el par de torsión paralelamente a sí mismo a una sección cualquiera del prisma, tendremos que ésta se encontrará sometida: 1.º, a un par de torsión $P_2 \times d$; 2.º, a un par de flexión

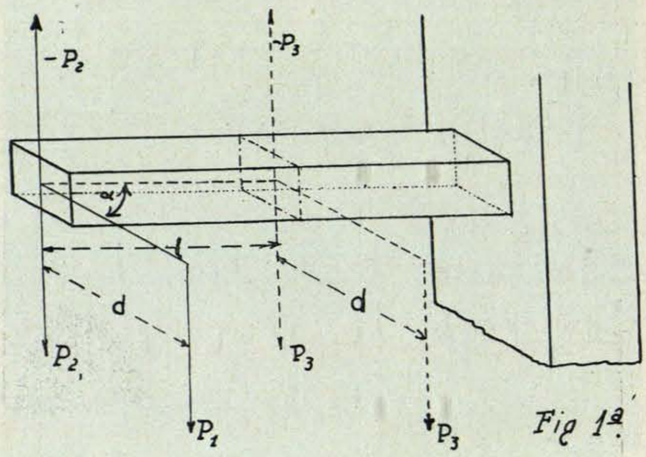


Fig 1.ª

$P_2 \times l$, y 3.º, a un esfuerzo cortante vertical P_2. Este último por su pequeña importancia puede despreciarse en absoluto, quedando sometida la sección a los dos momentos:

$$M_f = P \times l \times \cos \alpha$$
$$M_t = P \times d \times \operatorname{sen} \alpha$$

si es α el ángulo que mide el diedro formado por los planos que contienen por un lado la fuerza y el eje de gravedad de la pieza, y el plano de inercia ecuatorial principal, por el otro.

Las acciones ocasionadas por estos momentos son conocidas porque un elemento dx del prisma experimenta por el momento de flexión un alargamiento longitudinal unitario:

$$\lambda = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

y una contracción transversal:

$$\lambda' = \frac{1}{m} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

fórmulas en las que σ representa la tensión unitaria, ε el módulo de elasticidad y m el coeficiente de Poisson o relación entre el alargamiento unitario y la contracción, coeficiente que, como se sabe, varía entre 3 y 4 y que en pilares de hormigón zunchado se eleva, según experiencias realizadas por *Bach*, hasta tener un valor de 6,4 a 8,9; pero debiendo admitirse en hormigones de no reciente construcción un valor medio de 4 a 5, similar al de las rocas empleadas en aquélla. Por el momento de torsión M_t la sección transversal sufre un desplazamiento

$$\gamma = \frac{\tau}{\varepsilon'}$$

siendo τ la tensión unitaria y ε' el módulo de elasticidad transversal.

La determinación de la deformación máxima y, por consiguiente, la del coeficiente de trabajo en la fibra más fatigada, fué establecida con sujeción a las reglas generales de la Estática, primeramente por *Poncelet*, que obtuvo la fórmula aproximada:

$$R_{ft} = \frac{3}{8} \times R_f \pm \frac{5}{8} \sqrt{\overline{R_f}^2 + 4_r \overline{R_t}^2}$$

y después por *Tetmajer*, que la definió en la forma:

$$R_{ft} = 0{,}35 \times R_f \pm 0{,}65 \sqrt{\overline{R_f}^2 + 4_r \overline{R_t}^2}$$

como fórmula exacta. La verificación, como aconseja *Zafra*, puede hacerse aplicando la fórmula general:

$$R = \frac{M_t \times \upsilon}{I_p}$$

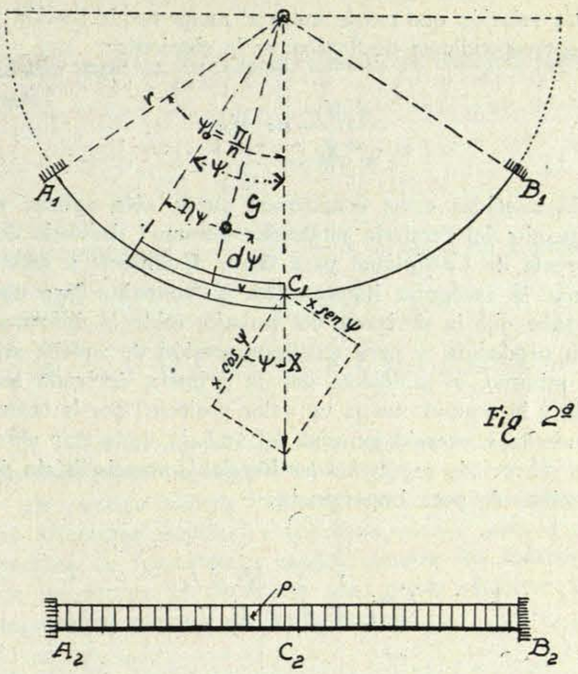
siendo M_t el momento de torsión, υ la distancia del eje neutro a las fibras más fatigadas, e I_p el momento de inercia polar. Se sobrentiende que R debe ser igual o menor que el valor de 4 k^os^ por centímetro cuadrado, siendo R_{ft} el máximo coeficiente de trabajo de la fibra más fatigada, bajo la doble acción del momento de flexión y el de torsión, teniendo en cuenta que R_f y R_t representan los coeficientes normales de trabajo admisibles para cada uno de dichos esfuerzos independientemente.

Expuestas estas consideraciones generales del problema que vamos a tratar, analizaremos el caso de una viga curva sometida a una carga uniformemente repartida en toda su longitud y que puede considerarse como el caso más general en estructuras urbanas (véase la fig. 2.ª), cálculo para el que aplicaremos los métodos usuales de la Mecánica elástica y el principio del mínimo trabajo molecular.

Como incógnita hiperestática aparece el momento de flexión en el punto *C*, que tendrá los siguientes valores para secciones correspondientes a un ángulo ψ.

I.—*Momento de flexión.*

$$M_B = X \cos \psi - p \times r \times \psi \times r_\psi$$



siendo la distancia al centro de gravedad del sector considerado:

$$r_\psi = \frac{r \operatorname{sen}^2 \frac{\psi}{2}}{\frac{\psi}{2}}$$

con lo que la fórmula anterior se transforma en:

$$M_B = X \cos \psi - p \, . \, r \, . \, \psi \, . \, r \, . \, \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\psi}{2}}{\frac{\psi}{2}}$$

o bien en:

$$M_B = X \cos \psi - p \, . \, r \, .^2 \, (1 - \cos \psi)$$

II.—*Momento de torsión.*

$$M_t = X \operatorname{sen} \psi - p \, . \, r \, . \, \psi \, . \, d_\psi$$

y siendo a su vez la distancia al centro de gravedad

$$d_\psi = r - \frac{r \operatorname{sen} \frac{\psi}{2}}{\frac{\psi}{2}} \, . \, \cos \frac{\psi}{2}$$

y como:

$$\cos \frac{\psi}{2} = r \left(1 - \frac{\operatorname{sen} \psi}{\psi}\right)$$

se obtiene finalmente:

$$M_T = X \operatorname{sen} \psi - p \, . \, r^2 \, (\psi - \operatorname{sen} \psi)$$

La relación que existe entre el momento de torsión y el correspondiente de flexión, es la siguiente:

$$\frac{d\,M_T}{d\,\psi} = M_B,$$

Establecidas estas ecuaciones, queda sólo aplicar el principio del "trabajo molecular mínimo" derivado del teorema de *Castigliano* para llegar fácilmente a determinar la incógnita hiperestática X buscada. Para ello se sabe que la derivada del trabajo, mide la deformación producida, y para que la expresión de aquélla sea un mínimo, es suficiente que la primera derivada sea nula y la segunda tenga un valor positivo; por lo tanto, siendo la expresión general del trabajo molecular elástico (abreviada según *Müller-Breslau*), prescindiendo de términos de poca importancia:

$$T = \frac{1}{2}\int_o^l \frac{M^2\,d\,L}{E\,.\,I}$$

derivando con relación a M, obtendremos como valor de la deformación:

$$\delta = \int_o^l \frac{M}{E\,.\,I}\cdot\frac{d\,M}{d\,R}\,d\,L = O$$

que en el caso de nuestro problema será:

$$\int_o^{\psi_o} \frac{M_B}{E\,.\,I}\cdot\frac{d\,M_B}{d\,X}\,d\psi + \int_o^{\psi_o}\frac{M_T}{E'\,.\,I_p}\cdot\frac{d\,M_T}{d\,X}\,.\,d\psi$$

siendo E el módulo de elasticidad transversal e I_p el momento de inercia polar.

Si hacemos $\dfrac{E\,.\,I}{E'\,.\,I_p} = m$ la integral anterior se transforma en la siguiente:

$$\int_o^{\psi_o} M_B\cdot\frac{d\,M_B}{d\,X}\,.\,d\psi + m\,.\int_o^{\psi_o} M_T\cdot\frac{d\,M_T}{d\,X}\,.\,d\psi = o$$

y como: $\dfrac{d\,M_B}{d\,X} = \cos\psi$ y $\dfrac{d\,M_T}{d\,X} = \operatorname{sen}\psi$ resultará en definitiva:

$$\int_o^{\psi_o} (X\cos - p\,.\,r^2 + p\,.\,r^2\,.\,\cos\psi)\cos\psi\,d\,\psi +$$

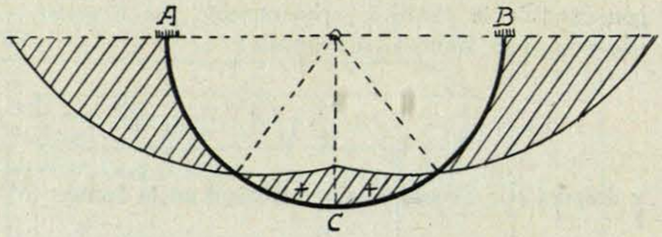
$$+ m\int_o^{\psi_o} (X\operatorname{sen}\psi - p\,.\,r^2.\,\psi + p\,.\,r^2\,.\operatorname{sen}\psi)\operatorname{sen}\psi\,d\psi = o$$

Desarrollando esta integral se obtiene fácilmente:

$$X = p\,.\,r^2\,.\,\frac{(4\operatorname{sen}\psi_0 - 2\,\psi_0)(m+1) + \operatorname{sen}2\,\psi_0\,(m-1) - 4\,.\,m\,.\,\psi_0\,.\cos\psi_0}{2\,\psi_0\,(m+1) - \operatorname{sen}2\,\psi_0\,(m-1)}\ [1]$$

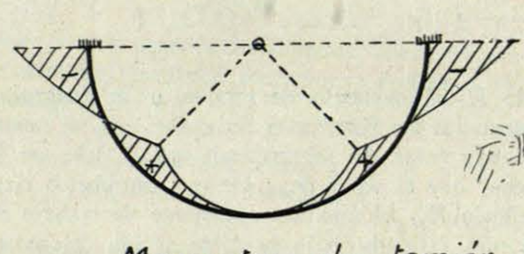
Para determinar rápidamente el valor de m en función de las dimensiones de la pieza, el ingeniero *St. Hessler* ha construído un ábaco en el que el valor de m varía entre 3,8 y 0,7 para una relación de altura al ancho de la viga de 2,2 a 0,2.

Como aplicación práctica supongamos el caso particular de que $\psi_o = \dfrac{\pi}{2}$, es decir, que la viga forme un semicírculo completo. Los momentos tendrán los valores y signos representados en la figura 3.ª



Momentos de flexion

Fig 3ª



Momentos de torsión

$$X = M_{BC} = p\,.\,r^2\,.\left(\frac{4}{\pi} - 1\right) = 0{,}27\,.\,p\,.\,r^2$$

En un punto cualquiera el momento será:

$$M_B = p\,.\,r^2\,.\left(\frac{4}{\pi} - 1\right)\operatorname{sen}\psi - p\,.\,r^2\,.\,(1 - \cos\psi)$$

que puede reducirse a:

$$M_B = p\,.\,r^2\,.\left(\frac{4\cos\psi}{\pi} - 1\right)$$

[1] En esta expresión figura ψ_o unas veces como arco con su valor angular y otras por el establecido de $\dfrac{\pi}{n}$.

A su vez el momento de torsión es:

$$M_T = p \cdot r^2 \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) \operatorname{sen} \psi - p \cdot r^2 (\psi - \operatorname{sen} \psi)$$

o reduciendo

$$M_T = p \cdot r^2 \cdot \left(\frac{4 \operatorname{sen} \psi}{\pi} - \psi \right)$$

El momento de flexión en el empotramiento será:

$$M_{BA} = p \cdot r^2 (-1) = -p \cdot r^2$$

El máximo momento de torsión en valor absoluto aparece también en el empotramiento y tiene por valor

$$M_{TA} = -p \cdot r^2 \cdot \frac{(\pi^2 - 8)}{2\pi} = -0{,}302.\ p.\ r^2$$

siendo negativo, alcanzando además un máximo positivo para:

$$\frac{d M_T}{d \psi} = M_B = O$$

que corresponde a $\frac{4 \cos \psi}{\pi} = 1$, o sea a un ángulo de 38° 14', con un valor de:

$$M_T = p \cdot r^2 \left(\frac{4 \operatorname{sen} \psi}{\pi} - \psi \right) = 0{,}120 \cdot p \cdot r^2$$

El momento de torsión será nulo para $M_T = 0$, que corresponde a un ángulo $\psi = 65°$.

De análoga manera podría aplicarse la teoría expuesta en diferentes amplitudes angulares, siendo para el proyectista de importancia capital conocer las inflexiones de las curvas de momentos para poder establecer una repartición racional de las armaduras.

NOTICIAS

FRANCIA

Para la aplicación de la ley Loucheur, el Consejo Municipal de París y el Consejo general del Sena, prevee la construcción en el extrarradio, dentro de un período de cinco años, de 18.000 viviendas baratas y 7.000 de alquiler medio. Dentro de la capital se intenta la construcción de 18.000 cuartos baratos, por cuenta del Office y 20.000 de tipo medio, a pagar mitad por el Office y mitad por el Ayuntamiento.

—La Cámara de Comercio de Nancy (Francia) ha aprobado, en principio, un concurso entre, arquitectos franceses, para premiar proyectos de casas baratas (ley Loucheur). Próximamente se publicará el programa definitivo.

—Para salvar un desnivel de 51 metros entre el barrio bajo y las alturas de El Havre (Francia), el Municipio de esta ciudad ha encargado a los ingenieros Horquart, Hennequin y Hugoniot la construcción de una escalera "tournante" de 160 metros, de hormigón.

ITALIA

Según estudio del sabio Mario Canavari, muerto recientemente, la inclinación del campanario de Pisa es debida a la especial estructura geológica del terreno que la sustenta. Una sección del terreno, en los alrededores de la famosa torre, permite apreciar cuatro capas superpuestas de resistencia insuficiente, pues, según los cálculos, no resisten más que un kilogramo por centímetro cuadrado. Como la torre reparte una carga de cinco kilogramos por centímetro cuadrado, origina una presión excesiva, que trae como consecuencia la inclinación. Parece que el Gobierno italiano va a ordenar los trabajos de consolidación.

—En la Prensa italiana está siendo objeto de grandes discusiones el tema de la circulación por la Vía del Plebiscito, arteria importante de aquella capital que padece hoy los inconvenientes de una excesiva congestión. Con este motivo ha salido a relucir un proyecto del arquitecto Gui, que data del año 1900, y consiste en la apertura de unos soportales bajo el palacio Altieri, para conseguir el ensanche de la calle sin necesidad de derribar ningún edificio. La solución más aceptada para este problema de tráfico consiste en reducir el número de líneas de tranvías que afluyen a este lugar. Volviendo al proyecto de los soportales, se considera más práctica y económica la construcción de un paso subterráneo.

—En la bóveda de la Catedral de Ferrara, joya del estilo Lombardo, han aparecido grandes grietas, consecuencia de haber cedido los dos cinchos de hierros colocados para contrarrestar su empuje. La estabilidad de la Catedral, que nunca había merecido mucha garantía, se considera ahora seriamente amenazada.

SUIZA

M. A. Bovy, director de la Escuela de Bellas Artes de Ginebra, inauguró una serie de conferencias, disertando sobre los caracteres de la arquitectura italiana en el siglo XV. Después de ocuparse de los grandes artistas de aquella época—Brunellesco, Alberti, San Gallo—terminó con estas palabras: "La arquitectura de final del siglo XV, en Italia, es