

ESTUDIO DE LA VIGA VIERENDEEL

Por JAVIER LAHUERTA, Arquitecto.

1. JUSTIFICACION.—Este tipo de viga, con el que es posible salvar vanos de gran amplitud, es excepcionalmente apropiado para la Arquitectura, en donde es frecuente encontrarse con el problema de tener que disponer sobre una planta diáfana de luz considerable, otra u otras plantas que por corresponder a habitaciones más reducidas tienen sus pilares menos espaciados.

Su cálculo se efectúa desde antiguo con el procedimiento del autor que ha dado su nombre a la viga, con algunas modificaciones posteriores (1); procedimiento de cálculo que, aparte de exigir las hipótesis simplificadoras siguientes: tramos de igual luz, momentos de inercia iguales en cabezas y montantes y cargas sólo en los nudos, obliga a resolver un sistema lineal de ecuaciones con tantas incógnitas como montantes, o al menos con la mitad de ellas si la viga es simétrica respecto al eje central vertical.

No es difícil, sin embargo, abordar el problema directamente y contar con la posibilidad de que cabezas y montantes tengan el momento de inercia preciso, de tramos de amplitud cualquiera, y con el efecto de cargas en los vanos. A continuación vamos a plantearlo así y a establecer las fórmulas finales de aplicación en los casos más frecuentes.

2. ECUACIONES DE UNA PIEZA AISLADA.—Partimos de las ecuaciones de deformación de la pieza recta de sección constante con sollicitación plana normal a ella (figura 1). En estas ecuaciones, ya conocidas, emplearemos como notación general el subíndice L para todos los elementos correspondientes al extremo izquierdo de la pieza, y el R para los del derecho, y como sentidos positivos adoptaremos los representados en la figura 1.

Estas ecuaciones son, como se sabe:

A) Carga total:

$$P = \int_0^l P(x) dx \quad (1)$$

B) Reacciones verticales:

$$T_L = \frac{\mathfrak{M}_R}{l} - \frac{M_L + M_R}{l} \quad (2)$$

$$T_R = \frac{\mathfrak{M}_L}{l} + \frac{M_L + M_R}{l}$$

siendo \mathfrak{M}_L y \mathfrak{M}_R los momentos estáticos de la carga $P(x)$ respecto a los extremos izquierdo y derecho.

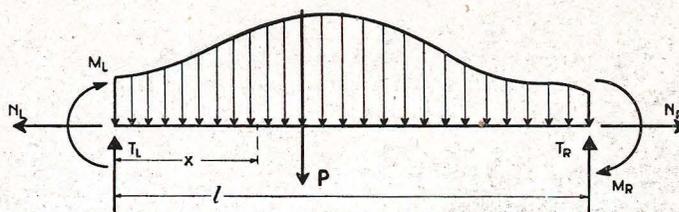
C) Equilibrio longitudinal:

$$N_L = N_R \quad (3)$$

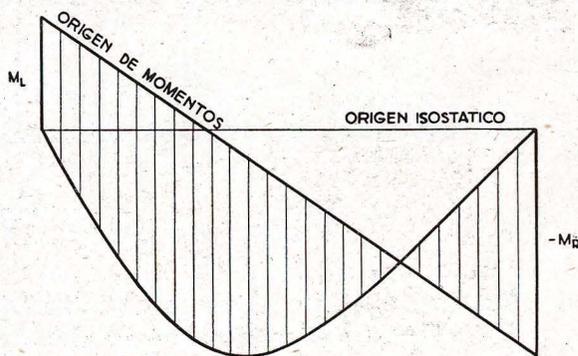
D) Momento flector:

$$M(x) = m(x) - \frac{M_L + M_R}{l} x + M_L \quad (4)$$

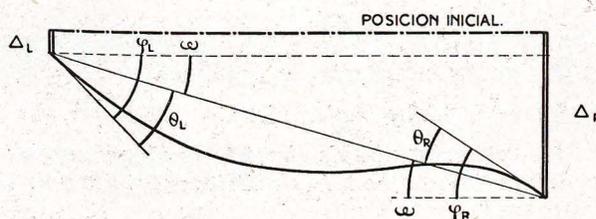
siendo $m(x)$ el momento flector de la pieza isostáticamente apoyada, con la carga $P(x)$.



a) CARGA Y REACCIONES



b) ZONA DE MOMENTOS.



c) ELÁSTICA

Figura 1.

(1) Véase, por ejemplo, A. Peña: "Mecánica Elástica", Madrid, 1930, páginas 227 a 235.

E) Giros de extremo:

$$\varphi_L = \frac{l}{6EI} (2M_L - M_R + \mathfrak{S}) + \frac{\Delta_R - \Delta_L}{l} = \theta_L + \omega \quad (5)$$

$$\varphi_R = \frac{l}{6EI} (2M_R - M_L - \mathfrak{R}) + \frac{\Delta_R - \Delta_L}{l} = \theta_R + \omega$$

fórmulas en las que Δ_L y Δ_R son los desplazamientos verticales de nudo, y ω el giro del eje de la pieza debido a ellos. Los valores \mathfrak{S} y \mathfrak{R} son unas expresiones, funciones de la carga $P(x)$, que denominamos términos de carga, y cuyo valor es

que ser iguales en las cabezas superior e inferior de cada tramo.

La figura 2 representa esquemáticamente una viga de un número impar de tramos $n = 2k - 1$ con cargas totales, y la figura 3 la correspondiente de un número par $n = 2k$.

El problema total tiene las incógnitas siguientes: Los pares M_L y M_R de extremo de barra, en total $2(3n + 1)$ incógnitas, que la condición de antisimetría reduce a la mitad, y la de simetría las reduce en el caso impar a $3k - 1$, y en el par a $3k$. Los giros ω de eje de barra, que como se ve en las figuras son $k - 1$ en el caso impar y k en el par.

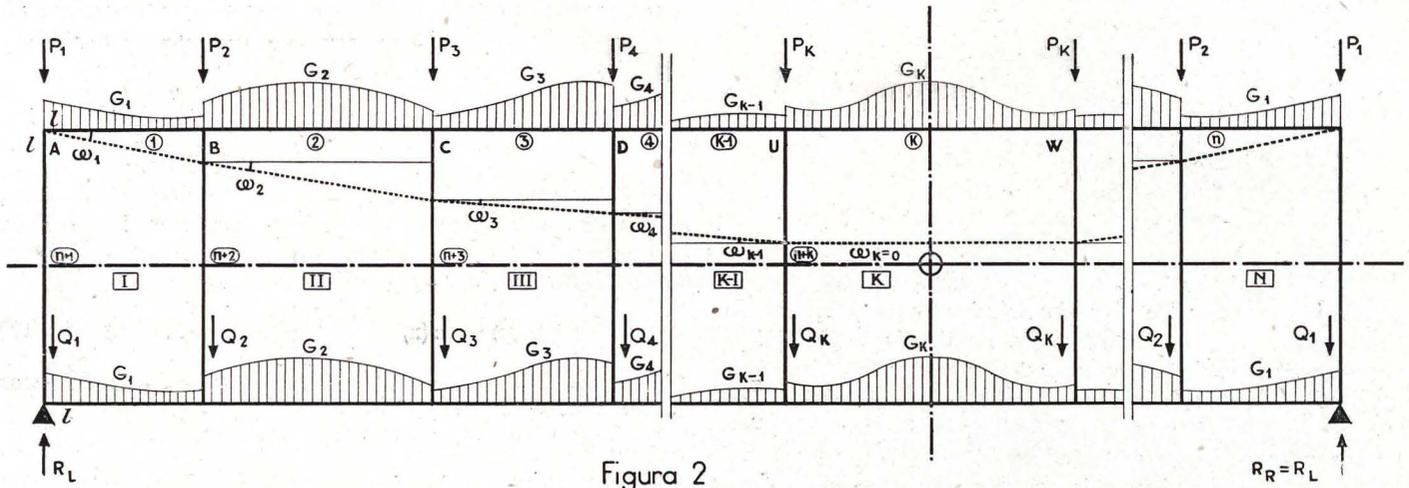


Figura 2

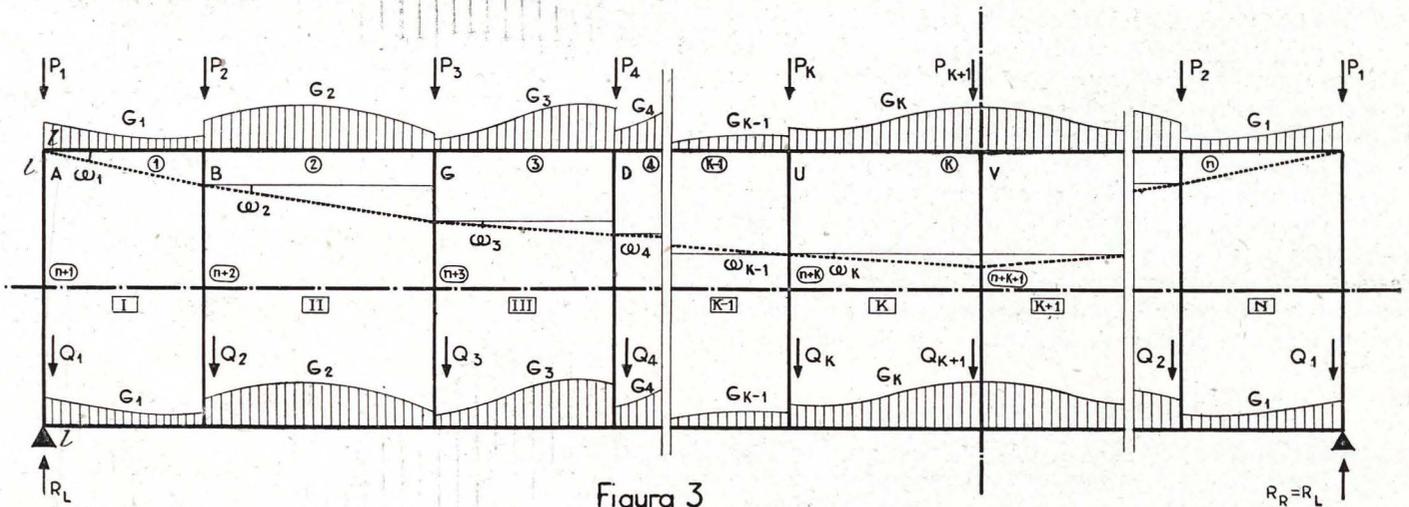


Figura 3

$$\mathfrak{S} = \frac{6}{l^2} \int_0^l (l-x) m(x) dx$$

$$\mathfrak{R} = \frac{6}{l^2} \int_0^l x m(x) dx \quad (6)$$

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S} + \mathfrak{R} = \frac{6}{l} \int_0^l m(x) dx$$

3. PLANTEO DEL PROBLEMA.—Estudiemos una viga Virendeel de las características siguientes:

- 1.ª Luces de tramo cualesquiera.
- 2.ª Eje vertical medio de simetría de viga y cargas; por tanto, deformaciones también simétricas (iguales y de signo contrario).
- 3.ª Eje horizontal medio de antisimetría estática; es decir, eje de simetría de la viga y deformaciones antisimétricas (iguales y del mismo signo) respecto a él. Según esto, las cargas en los nudos superiores e inferiores pueden ser cualesquiera, pero las cargas en los vanos tienen

Para obtener estas incógnitas plantearemos un sistema de ecuaciones que se compone de las siguientes:

1.º De equilibrio de momentos en nudo:

nudo A	$M_{L, n+1} = -M_{L1}$	
nudo B	$M_{L, n+2} = -M_{R1} - M_{L2}$	
nudo C	$M_{L, n+3} = -M_{R2} - M_{L3}$	
.....		
nudo U	$M_{L, n+k} = -M_{R, k-1} - M_{Lk}$	(7)

2.º De igualdad de los giros de extremo de barra:

nudo A	$\theta_{R1} + \omega_1 = \theta_{L, n+1}$	
nudo B	$\theta_{R1} + \omega_1 = \theta_{R2} + \omega_2 = \theta_{L, n+2}$	
nudo C	$\theta_{R2} + \omega_2 = \theta_{R3} + \omega_3 = \theta_{L, n+3}$	(8)
.....		
nudo U	$\theta_{R, k-1} + \omega_{k-1} = \theta_{L, k} + \omega_k = \theta_{L, n+k}$	
nudo V (solo caso par)	$\theta_{Rk} + \omega_k = 0$	

Restando entre sí estas ecuaciones eliminamos las ω :

$$\begin{aligned} \theta_{L1} - \theta_{R1} &= \theta_{Ln+1} - \theta_{Ln+2} \\ \theta_{L2} - \theta_{R2} &= \theta_{Ln+2} - \theta_{Ln+3} \\ \theta_{L3} - \theta_{R3} &= \theta_{Ln+3} - \theta_{Ln+4} \\ &\dots\dots\dots \\ \theta_{Lk-1} - \theta_{Rk-1} &= \theta_{Ln+k-1} - \theta_{Ln+k} \\ \text{caso impar} \quad \theta_{Lk} &= \theta_{Ln+k} \\ \text{caso par} \quad \theta_{Lk} - \theta_{Rk} &= \theta_{Ln+k} \end{aligned} \quad (9)$$

Tenemos planteadas de esta manera (ecuaciones (7) y (9)) $2k$ ecuaciones, faltándonos, por tanto, $k - 1$ ecuaciones más en el caso impar, y k en el par; ecuaciones complementarias que expresan la igualdad de la suma de las reacciones T_L de las cabezas superior e inferior de cada tramo a la de las cargas situadas a su izquierda.

3.º Ecuaciones complementarias: Intervienen en ellas las cargas, que, como se ve en la figura, son:

Cargas de vano $G_i(x)$ en ambas cabezas del tramo i , de valor total

$$G_i = \int_0^{l_i} G_i(x) dx$$

Cargas de nudo: P_i en el nudo superior izquierdo del tramo i y Q_i en el nudo inferior izquierdo del mismo tramo.

Las reacciones totales de la viga valen en el caso impar

$$R_L = R_R = 2 \sum_1^{k-1} G_i + G_k + \sum_1^k (P_i + Q_i)$$

y en el caso par

$$R_L = R_R = 2 \sum_1^k G_i + \sum_1^k (P_i + Q_i) + \frac{1}{2} (P_{k+1} + Q_{k+1})$$

las ecuaciones complementarias son:

$$R_L - P_1 - Q_1 = 2T_{L1} = 2 \frac{\mathfrak{M}_{R1}}{l_1} - 2 \frac{M_{L1} + M_{R1}}{l_1}$$

$$\begin{aligned} R_L - P_1 - P_2 - Q_1 - Q_2 - 2G_1 &= 2T_{L2} = \\ &= 2 \frac{\mathfrak{M}_{R2}}{l_2} - 2 \frac{M_{L2} + M_{R2}}{l_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_L - P_1 - P_2 - P_3 - Q_1 - Q_2 - Q_3 - 2G_1 - 2G_2 &= 2T_{L3} = \\ &= 2 \frac{\mathfrak{M}_{R3}}{l_3} - 2 \frac{M_{L3} + M_{R3}}{l_3} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} R_L - P_1 - P_2 - \dots - P_{k-1} - Q_1 - Q_2 - \dots - Q_{k-1} - \\ - 2G_1 - 2G_2 - \dots - 2G_{k-2} &= 2T_{Lk-1} = \\ &= 2 \frac{\mathfrak{M}_{Rk-1}}{l_{k-1}} - 2 \frac{M_{Lk-1} + M_{Rk-1}}{l_{k-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_L - P_1 - P_2 - \dots - P_k - Q_1 - Q_2 - \dots - Q_k - \\ - 2G_1 - 2G_2 - \dots - 2G_{k-1} &= 2T_{Lk} = \\ &= 2 \frac{\mathfrak{M}_{Rk}}{l_k} - 2 \frac{M_{Lk} + M_{Rk}}{l_k} \end{aligned}$$

de estas ecuaciones, la última sólo corresponde al caso par, pues en el impar no hace más que expresar la condición de simetría de la barra k . Empleando la notación

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{l_1}{2} (R_L - P_1 - Q_1) - \mathfrak{M}_{R1} \\ A_2 &= \frac{l_2}{2} (R_L - P_1 - P_2 - Q_1 - Q_2 - 2G_1) - \mathfrak{M}_{R2} \end{aligned} \quad (11)$$

$$A_k = \frac{l_k}{2} (R_L - \sum_1^k P_i - \sum_1^k Q_i - 2 \sum_1^{k-1} G_i) - \mathfrak{M}_{Rk}$$

escribiremos las ecuaciones complementarias en la forma

$$\begin{aligned} M_{L1} + M_{R1} &= -A_1 \\ M_{L2} + M_{R2} &= -A_2 \\ M_{L3} + M_{R3} &= A_3 \\ &\dots\dots\dots \\ M_{Lk} + M_{Rk} &= -A_k \end{aligned} \quad (12)$$

Obsérvese que A_k en el caso impar vale cero, por lo que esta última ecuación expresa claramente la condición de simetría indicada.

4. FORMULAS GENERALES DE APLICACION.—Desarrollemos el sistema así planteado; vamos a eliminar los momentos de extremo derecho y los momentos de extremo de montante. Del sistema (12) despejamos los M_{Ri}

$$M_{Ri} = -A_i - M_{Li} \quad (i = 1; i = k) \quad (12')$$

y de las del sistema (7) los M_{Ln+i} introduciendo estos valores últimos:

$$\begin{aligned} M_{Ln+1} &= -M_{L1} \\ M_{Ln+i} &= A_i - M_{Li+1} \quad M_{Li} \quad (i = 2; i = k) \end{aligned}$$

Las expresiones $\theta_{Li} - \theta_{Ri}$ valen, sustituyendo los valores hallados,

$$\begin{aligned} \theta_{Li} - \theta_{Ri} &= \frac{l_i}{6EI_i} (2M_{Li} - M_{Ri} + \mathfrak{S}_i) - \frac{l_i}{6EI_i} (2M_{Ri} - M_{Li} - \mathfrak{R}_i) = \\ &= \frac{l_i}{6EI_i} (3M_{Li} - 3M_{Ri} + \mathfrak{S}_i + \mathfrak{R}_i) = \frac{l_i}{6EI_i} (6M_{Li} + 3A_i + \mathfrak{S}_i) \end{aligned}$$

y la expresión del giro de extremo de montante

$$\theta_{Ln+i} = \frac{h}{6EI_{n+i}} (2M_{Ln+i} - M_{Rn+i}) = \frac{h}{6EI_{n+i}} M_{Ln+i}$$

que con los valores despejados es

$$\theta_{Ln+i} = -\frac{h}{6EI_{n+1}} M_{L1}$$

$$\theta_{Ln+i} = \frac{h}{6EI_{n+i}} (A_{i-1} + M_{Li-1} - M_{Li}) \quad (i = 2; i = k)$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (9) obtenemos finalmente el sistema

$$\begin{aligned} \frac{l_1}{6EI_1} (6M_{L1} + 3A_1 + \mathfrak{S}_1) &= -\frac{h}{6EI_{n+1}} M_{L1} - \\ &- \frac{h}{6EI_{n+2}} (A_1 + M_{L1} - M_{L2}) \\ \frac{l_2}{6EI_2} (6M_{L2} + 3A_2 + \mathfrak{S}_2) &= \frac{h}{6EI_{n+2}} (A_1 + M_{L1} - M_{L2}) - \\ &- \frac{h}{6EI_{n+3}} (A_2 + M_{L2} - M_{L3}) \\ \frac{l_3}{6EI_3} (6M_{L3} + 3A_3 + \mathfrak{S}_3) &= \frac{h}{6EI_{n+3}} (A_2 + M_{L2} - M_{L3}) - \\ &- \frac{h}{6EI_{n+4}} (A_3 + M_{L3} - M_{L4}) \end{aligned}$$

(13)

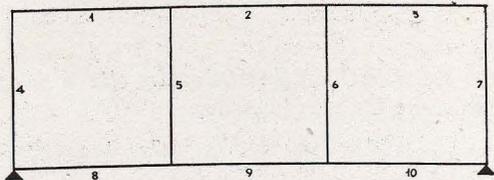
$$M_{L1} = \frac{-\lambda_1 A_1 - \lambda_3 \mathcal{E}_1 - \alpha_2 \alpha_5 \mathcal{Q}_2}{N}$$

$$M_{R1} = \frac{(\lambda_1 - N) A_1 + \lambda_3 \mathcal{E}_1 + \alpha_2 \alpha_5 \mathcal{Q}_2}{N}$$

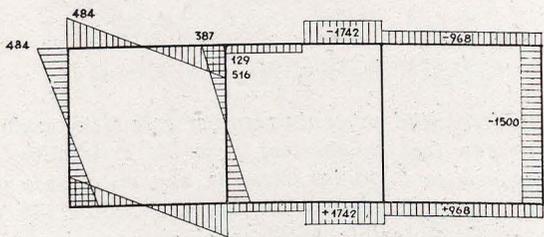
$$M_{L2} = \frac{\lambda_2 A_1 - \alpha_1 \alpha_5 \mathcal{E}_1 - \lambda_4 \mathcal{Q}_2}{N}$$

siendo en ellas

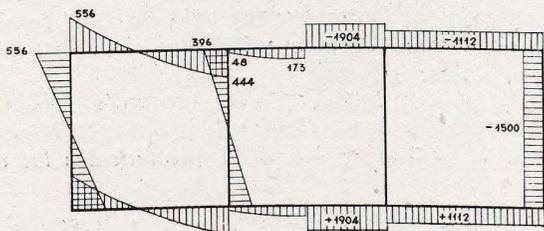
$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{l_1}{2} (2G_1 + G_2 + P_2 + Q_2) - \mathfrak{M}_{R1} \\ &= \frac{l_1}{2} (G_2 + P_2 + Q_2) + \mathfrak{M}_{L1} \end{aligned}$$



a)



b)



c)

Figura 4

Casos particulares:

1.º Viga con carga sólo en los nudos. Desaparecen los términos correspondientes a la carga en vanos, quedando

$$A_1 = \frac{l_1}{2} (P_2 + Q_2)$$

y las expresiones de los momentos

$$M_{L1} = -\frac{\lambda_1}{2N} (P_2 + Q_2) l_1$$

$$M_{R1} = \frac{\lambda_1 - N}{2N} (P_2 + Q_2) l_1$$

$$M_{L2} = \frac{\lambda_2}{2N} (P_2 + Q_2) l_1$$

2.º Viga con carga uniformemente repartida g en los vanos. No existen P ni Q , y los momentos de carga son:

$$A_1 = \frac{1}{2} g (l_1^2 + l_1 l_2) \quad \mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} g l_1^2 \quad \mathcal{Q}_2 = \frac{1}{4} g l_2^2$$

con estos valores, las expresiones de los momentos son:

$$M_{L1} = -\frac{g}{4N} \left[2(\lambda_1 + \lambda_3) l_1^2 + 2\lambda_1 l_1 l_2 + \alpha_2 \alpha_5 l_2^2 \right]$$

$$M_{R1} = \frac{g}{4N} \left[2(\lambda_1 + \lambda_3 - N) l_1^2 + 2(\lambda_1 - N) l_1 l_2 + \alpha_2 \alpha_5 l_2^2 \right]$$

$$M_{L2} = \frac{g}{4N} \left[2(\lambda_2 - \alpha_1 \alpha_2) l_1^2 + 2\lambda_2 l_1 l_2 - \lambda_4 l_2^2 \right]$$

3.º Valores para el caso en que todas las piezas tengan la misma rigidez y la misma luz.

Carga en los nudos:

$$M_{L1} = -\frac{15}{62} (P_2 + Q_2) l$$

$$M_{R1} = -\frac{16}{62} (P_2 + Q_2) l$$

$$M_{L2} = -\frac{4}{62} (P_2 + Q_2) l$$

Carga uniforme:

$$M_{L1} = -\frac{69}{124} g l^2$$

$$M_{R1} = -\frac{55}{124} g l^2$$

$$M_{L2} = -\frac{6}{124} g l^2$$

Las gráficas (fig. 4) se han dibujado tomando

$$P_1 = Q_1 = 500 \text{ kg.}$$

$$P_2 = Q_2 = 1.000 \text{ kg.}$$

$$l = 1 \text{ m.}$$

$$g = 1.000 \text{ kg/m.}$$

En la mitad izquierda de las figuras se representan las gráficas de momentos, acotadas en kilográmetros, y en la derecha la de esfuerzos longitudinales, acotada en kilogramos.

6. VIGA DE CUATRO TRAMOS.—Tiene $k = 2$, $n = 4$; el sistema consta también de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} (6\alpha_1 + \alpha_6 + 1) M_{L1} - \alpha_6 M_{L2} &= -(3\alpha_1 + \alpha_6) A_1 - \alpha_1 \mathcal{E}_1 \\ -\alpha_6 M_{L1} + (6\alpha_2 + \alpha_6) M_{L2} &= \alpha_6 A_1 - 3\alpha_2 A_2 - \alpha_2 \mathcal{E}_2 \end{aligned}$$

resolviendo este sistema y empleando las notaciones

$$N = 36\alpha_1 \alpha_2 + 6\alpha_1 \alpha_6 + 6\alpha_2 \alpha_6 + 6\alpha_2 + \alpha_6$$

$$\lambda_1 = 18\alpha_1 \alpha_2 + 3\alpha_1 \alpha_6 + 6\alpha_2 \alpha_6$$

$$\lambda_2 = 3\alpha_1 \alpha_6 + \alpha_6$$

$$\lambda_3 = 6\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_6$$

$$\lambda_4 = 6\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_6 + \alpha_2$$

obtenemos como expresiones de los momentos de extremo de cabeza

$$M_{L1} = \frac{-\lambda_1 A_1 - 3\alpha_2 \alpha_6 A_2 - \lambda_3 \mathcal{E}_1 - \alpha_2 \alpha_6 \mathcal{E}_2}{N}$$

$$M_{R1} = \frac{(\lambda_1 - N) A_1 + 3\alpha_2 \alpha_6 A_2 + \lambda_3 \mathcal{E}_1 + \alpha_2 \alpha_6 \mathcal{E}_2}{N}$$

$$M_{L2} = \frac{\lambda_2 A_1 - 3\lambda_4 A_2 - \alpha_1 \alpha_6 \mathcal{E}_1 - \lambda_4 \mathcal{E}_2}{N}$$

$$M_{R2} = \frac{-\lambda_2 A_1 + (3\lambda_4 - N) A_2 + \alpha_1 \alpha_6 \mathcal{E}_1 + \lambda_4 \mathcal{E}_2}{N}$$

siendo en ellas

$$A_1 = \frac{l_1}{2} [2G_2 + P_2 + Q_2 + \frac{1}{2} (P_3 + Q_3)] + \mathfrak{M}_{L1}$$

$$A_2 = \frac{l_2}{4} (P_3 + Q_3) \mathfrak{M}_{L2}$$

Casos particulares:

1.º Viga con carga sólo en los nudos. Queda en este caso

$$A_1 = \frac{l_1}{2} (P_2 + Q_2) + \frac{l_1}{4} (P_3 + Q_3)$$

$$A_2 = \frac{l_2}{4} (P_3 + Q_3)$$

y las expresiones de los momentos

$$M_{L1} = -\frac{2\lambda_1 l_1}{4N} (P_2 + Q_2) - \frac{\lambda_1 l_1 + 3\alpha_2 \alpha_6 l_2}{4N} (P_3 + Q_3)$$

$$M_{R1} = \frac{2(\lambda_1 - N) l_1}{4N} (P_2 + Q_2) + \frac{(\lambda_1 - N) l_1 + 3\alpha_2 \alpha_6 l_2}{4N} (P_3 + Q_3)$$

$$M_{L2} = \frac{2\lambda_2 l_1}{4N} (P_2 + Q_2) + \frac{\lambda_2 l_1 - 3\lambda_4 l_2}{4N} (P_3 + Q_3)$$

$$M_{R2} = -\frac{2\lambda_2 l_1}{4N} (P_2 + Q_2) - \frac{\lambda_2 l_1 - (3\lambda_4 - N) l_2}{4N} (P_3 + Q_3)$$

Carga uniforme:

$$M_{L1} = -\frac{92}{110} gl^2$$

$$M_{R1} = -\frac{73}{110} gl^2$$

$$M_{L2} = -\frac{21}{110} gl^2$$

$$M_{R2} = -\frac{34}{110} gl^2$$

Con los valores

$$P_1 = Q_1 = 500 \text{ kg.} \quad P_2 = P_3 = Q_2 = Q_3 = 1.000 \text{ kg.}$$

$$l = 1 \text{ m.} \quad g = 1.000 \text{ kg/m.}$$

se han dibujado las gráficas de la figura 5.

7. VIGA DE CINCO TRAMOS.—En ella $k = 3$, $n = 5$. El sistema tiene las tres ecuaciones

$$(6\alpha_1 + \alpha_7 + 1) M_{L1} - \alpha_7 M_{L2} = - (3\alpha_1 + \alpha_7) A_1 - \alpha_1 \mathcal{E}_1$$

$$-\alpha_7 M_{L1} + (6\alpha_2 + \alpha_7 + \alpha_8) M_{L2} - \alpha_8 M_{L3} = \alpha_7 A_1 - (3\alpha_2 + \alpha_8) A_1 - \alpha_2 \mathcal{E}_2$$

$$-\alpha_8 M_{L2} + (3\alpha_3 + \alpha_8) M_{L3} = \alpha_8 A_1 - \alpha_3 \mathcal{E}_3$$

Ninguna dificultad presenta resolver este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas; pero los resultados finales, expresados en fórmulas literales, son en el caso general de una complejidad que los hace de aplicación poco práctica, y es preferible resolver el sistema después de haber sustituido las letras por sus valores numéricos. Resultan, sin embargo, fórmulas utilizables en los siguientes casos particulares:

1.º Montantes de igual rigidez $1 = \alpha_7 = \alpha_8$. Usaremos la notación $\lambda_i = 3\alpha_i + 1$, con lo que tenemos las ecuaciones:

$$2\lambda_1 M_{L1} - M_{L2} = -\lambda_1 A_1 - \mathcal{E}_1$$

$$-M_{L1} + 2\lambda_2 M_{L2} - M_{L3} = A_1 - \lambda_2 A_2 - \mathcal{E}_2$$

$$-M_{L2} + \lambda_3 M_{L3} = A_2 - \mathcal{E}_3$$

que resueltas dan las expresiones

$$M_{L1} = \frac{-(2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_3) A_1 - (\lambda_2 \lambda_3 - 1) A_2 - (2\lambda_2 \lambda_3 - 1) \mathcal{E}_1 - \lambda_3 \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3}{4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 2\lambda_1 - \lambda_3}$$

$$M_{R1} = \frac{-(2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1) A_1 + (\lambda_2 \lambda_3 - 1) A_2 + (2\lambda_2 \lambda_3 - 1) \mathcal{E}_1 + \lambda_3 \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3}{4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 2\lambda_1 - \lambda_3}$$

$$M_{L2} = \frac{\lambda_1 \lambda_3 A_1 - (2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 2\lambda_1) A_2 - \lambda_3 \mathcal{E}_1 - 2\lambda_1 \lambda_3 \mathcal{E}_2 - 2\lambda_1 \mathcal{E}_3}{4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 2\lambda_1 - \lambda_3}$$

$$M_{R2} = \frac{-\lambda_1 \lambda_3 A_1 - (2\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_3) A_2 + \lambda_3 \mathcal{E}_1 + 2\lambda_1 \lambda_3 \mathcal{E}_2 + 2\lambda_1 \mathcal{E}_3}{4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 2\lambda_1 - \lambda_3}$$

$$M_{L3} = \frac{\lambda_1 A_1 + (2\lambda_1 \lambda_2 - 1) A_2 - \mathcal{E}_1 - 2\lambda_1 \mathcal{E}_2 - (4\lambda_1 \lambda_2 - 1) \mathcal{E}_3}{4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 2\lambda_1 - \lambda_3}$$

siendo en ellas

$$A_1 = \frac{l_1}{2} (2G_2 + G_3 + P_2 + Q_2 + P_3 + Q_3) + \mathfrak{M}_{L1}$$

$$A_2 = \frac{l_2}{2} (G_3 + P_3 + Q_3) + \mathfrak{M}_{L2}$$

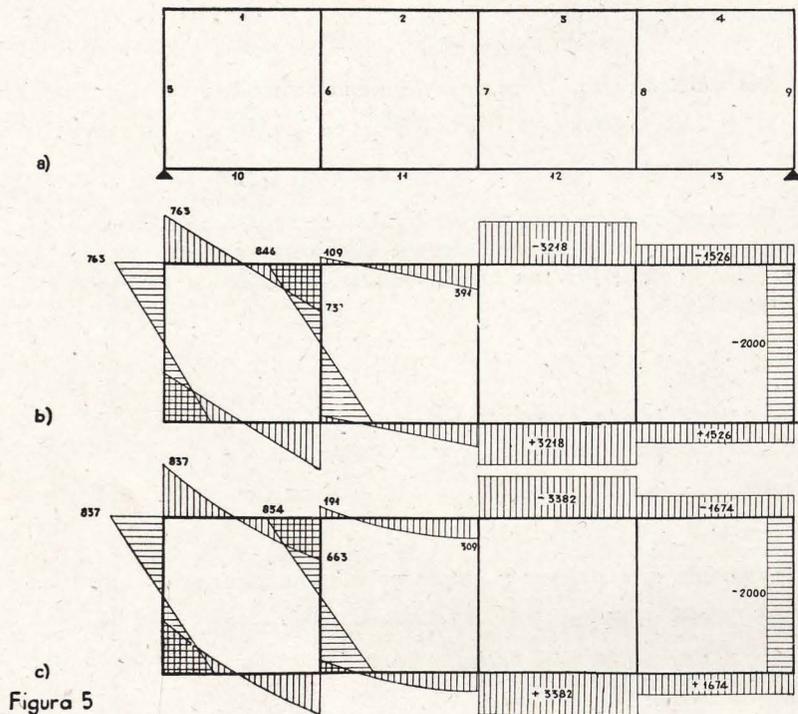


Figura 5

2.º Viga con carga uniformemente repartida g en los vanos. Los términos de la carga son:

$$A_1 = \frac{1}{2} g (l_1^2 + 2l_1 l_2) \quad \mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} g l_1^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2} g l_2^2 \quad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} g l_2^2$$

y con estos valores las expresiones de los momentos son:

$$M_{L1} = -\frac{g}{2N} \left[(\lambda_1 + \lambda_3) l_1^2 + 2\lambda_1 l_1 l_2 + 4\alpha_2 \alpha_6 l_2^2 \right]$$

$$M_{R1} = \frac{g}{2N} \left[(\lambda_1 + \lambda_3 - N) l_1^2 + 2(\lambda_1 - N) l_1 l_2 + 4\alpha_2 \alpha_6 l_2^2 \right]$$

$$M_{L2} = \frac{g}{2N} \left[(\lambda_2 - \alpha_1 \alpha_6) l_1^2 + 2\lambda_2 l_1 l_2 - 4\lambda_4 l_2^2 \right]$$

$$M_{R2} = -\frac{g}{2N} \left[(\lambda_2 - \alpha_1 \alpha_6) l_1^2 + 2\lambda_2 l_1 l_2 - (4\lambda_4 - N) l_2^2 \right]$$

3.º Valores para el caso en que todas las piezas tengan igual luz e igual rigidez.

Carga en los nudos:

$$M_{L1} = -\frac{54}{220} (P_2 + Q_2) l - \frac{30}{220} (P_3 + Q_3) l$$

$$M_{R1} = -\frac{56}{220} (P_2 + Q_2) l - \frac{25}{220} (P_3 + Q_3) l$$

$$M_{L2} = \frac{8}{220} (P_2 + Q_2) l - \frac{20}{220} (P_3 + Q_3) l$$

$$M_{R2} = -\frac{8}{220} (P_2 + Q_2) l - \frac{35}{220} (P_3 + Q_3) l$$

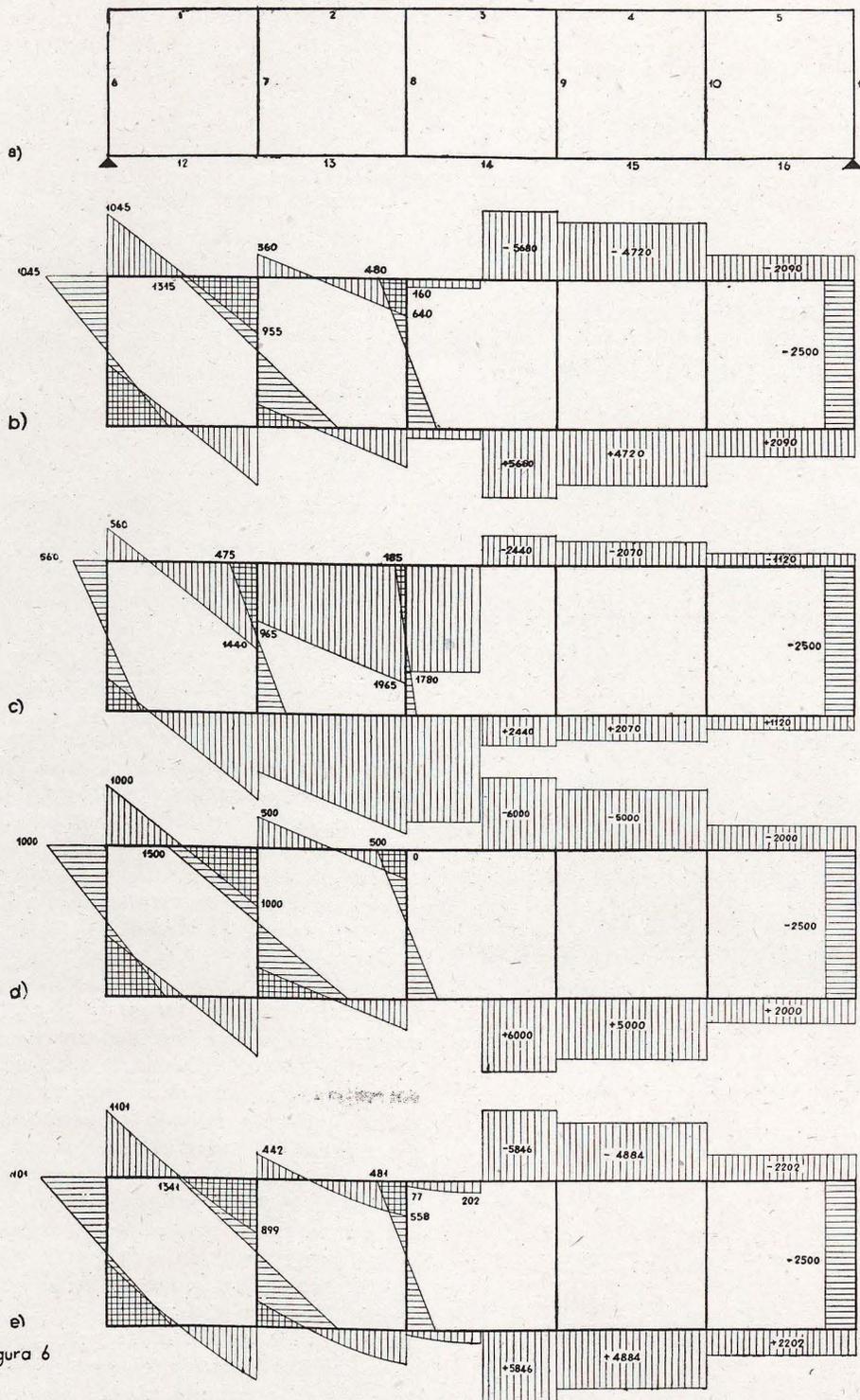


Figura 6

2.º Montantes de igual rigidez, carga en los nudos solamente. En este caso es

$$A_1 = \frac{l_1}{2} (P_2 + Q_2) + \frac{l_1}{2} (P_3 + Q_3)$$

$$A_2 = \frac{l_2}{2} (P_3 + Q_3)$$

y las expresiones de los momentos, llamando

$$N = 4 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 2 \lambda_1 - \lambda_3:$$

$$M_{L1} = - \frac{2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_3}{2N} l_1 (P_2 + Q_2) - \frac{(2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_3) l_1 + (\lambda_2 \lambda_3 - 1) l_2}{2N} (P_3 + Q_3)$$

$$M_{R1} = - \frac{2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1}{2N} l_1 (P_2 + Q_2) - \frac{(2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_1) l_1 - (\lambda_2 \lambda_3 - 1) l_2}{2N} (P_3 + Q_3)$$

$$M_{L2} = \frac{\lambda_1 \lambda_3}{2N} l_1 (P_2 + Q_2) - \frac{\lambda_1 \lambda_3 l_1 + (2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 2 \lambda_1) l_2}{2N} (P_3 + Q_3)$$

$$M_{R2} = - \frac{\lambda_1 \lambda_3}{2N} l_1 (P_2 + Q_2) - \frac{\lambda_1 \lambda_3 l_1 + (2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_3) l_2}{2N} (P_3 + Q_3)$$

$$M_{L3} = \frac{\lambda_1}{2N} l_1 (P_2 + Q_2) + \frac{\lambda_1 l_1 + (2 \lambda_1 \lambda_2 - 1) l_2}{2N} (P_3 + Q_3)$$

3.º Carga uniformemente repartida g en los vanos. Los términos de la carga son:

$$A_1 = \frac{1}{2} g (l_1^2 + 2 l_1 l_2 + l_1 l_3) \quad A_2 = \frac{1}{2} g (l_2^2 + l_2 l_3)$$

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} g l_1^2 \quad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} g l_2^2 \quad \mathcal{E}_3 = \frac{1}{2} g l_3^2$$

con estos valores las expresiones de los momentos son:

$$M_{L1} = -\frac{g}{4N} \left[(4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 4\lambda_2 \lambda_3 - 2\lambda_1 - 2\lambda_3 - 2) l_1^2 + \right. \\ \left. + (4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 2\lambda_1 - 2\lambda_3) (2 l_1 l_2 + l_1 l_3) + \right. \\ \left. + (2\lambda_2 \lambda_3 - 2\lambda_3 - 2) l_2^2 + (2\lambda_2 \lambda_3 - 2) l_2 l_3 + l_3^2 \right]$$

$$M_{R1} = \frac{g}{4N} \left[(-4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 4\lambda_2 \lambda_3 + 2\lambda_1 - 2) l_1^2 + \right. \\ \left. + (-4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 2\lambda_1) (2 l_1 l_2 + l_1 l_3) + \right. \\ \left. + (2\lambda_2 \lambda_3 - 2\lambda_3 - 2) l_2^2 + (2\lambda_2 \lambda_3 - 2) l_2 l_3 + l_3^2 \right]$$

$$M_{L2} = -\frac{g}{4N} \left[(-2\lambda_1 \lambda_3 + 2\lambda_3) l_1^2 - 2\lambda_1 \lambda_3 (2l_1 l_2 + l_1 l_3) + \right. \\ \left. + (4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + 4\lambda_1 \lambda_3 - 4\lambda_1) l_2^2 + (4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - \right. \\ \left. - 4\lambda_1) l_2 l_3 + 2\lambda_1 l_3^2 \right]$$

$$M_{R2} = -\frac{g}{4N} \left[(2\lambda_1 \lambda_3 - 2\lambda_3) l_1^2 + 2\lambda_1 \lambda_3 (2l_1 l_2 + l_1 l_3) + \right. \\ \left. + (4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - 4\lambda_1 \lambda_3 - 2\lambda_3) l_2^2 + (4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 - \right. \\ \left. - 2\lambda_3) l_2 l_3 - 2\lambda_3 l_3^2 \right]$$

$$M_{L3} = \frac{g}{4N} \left[(2\lambda_1 - 2) l_1^2 + 2\lambda_1 (2l_1 l_2 + l_1 l_3) + (4\lambda_1 \lambda_2 - \right. \\ \left. - 4\lambda_1 - 2) l_2^2 + (4\lambda_1 \lambda_2 - 2) l_2 l_3 - (4\lambda_1 \lambda_2 - 1) l_3^2 \right]$$

4.º Valores para el caso en que todas las piezas tengan igual rigidez e igual luz.

Carga en los nudos:

$$M_{L1} = -\frac{120}{488} (P_2 + Q_2) l - \frac{135}{488} (P_3 + Q_3) l$$

$$M_{R1} = -\frac{124}{488} (P_2 + Q_2) l - \frac{109}{488} (P_3 + Q_3) l$$

$$M_{L2} = \frac{16}{488} (P_2 + Q_2) l - \frac{104}{488} (P_3 + Q_3) l$$

$$M_{R2} = -\frac{16}{488} (P_2 + Q_2) l - \frac{140}{488} (P_3 + Q_3) l$$

$$M_{L3} = \frac{4}{488} (P_2 + Q_2) l + \frac{35}{488} (P_3 + Q_3) l$$

Carga uniforme:

$$M_{L1} = -\frac{1075}{976} gl^2$$

$$M_{R1} = -\frac{877}{976} gl^2$$

$$M_{L2} = -\frac{432}{976} gl^2$$

$$M_{R2} = -\frac{544}{976} gl^2$$

$$M_{L3} = -\frac{75}{976} gl^2$$

Con los valores

$$P_1 = Q_1 = 500 \text{ kg.}$$

$$P_2 = P_3 = Q_2 = Q_3 = 1.000 \text{ kg.}$$

$$l = 1 \text{ m.}$$

$$g = 1.000 \text{ kg/m.}$$

se han dibujado las gráficas de la figura 6.

NOTA 1. Entre las notaciones empleadas a lo largo de este trabajo, original del autor, figuran algunas idénticas a las empleadas por A. Kleinlogel en su obra: "Cálculo de las estructuras porticadas hiperestáticas", Editorial Labor, Barcelona, 1944. Son éstas las de los términos de carga, y se han escogido precisamente porque dichos valores se encuentran calculados en el tomo IV de la obra mencionada, para los casos más frecuentes de carga, lo que facilita considerablemente la labor.

NOTA 2. En la figura 6 se han dibujado las zonas de momentos flectores de una viga de cinco tramos con cargas en los nudos, para tres valores distintos de rigidez de cabezas respecto a montantes. La gráfica b) corresponde al caso de ser en las cabezas $\kappa_i = 1$, $\lambda_i = 4$, ó sea igual que la de los montantes. La gráfica c) al caso de cabezas fuertemente rígidas, tomando $\kappa_i = 1/30$, $\lambda_i = 1,1$, valor al que se llega con facilidad en construcciones de hormigón armado con cabezas de sección de T. La gráfica d) corresponde al caso de montantes extraordinariamente rígidos, habiendo tomado el caso límite $\kappa_i = \infty$, $\lambda_i = \infty$, o sea inercia despreciable de las cabezas.

De la simple inspección de las gráficas se desprende que tiene bastante influencia la rigidez relativa de cabezas y montantes, especialmente si las cabezas son rígidas, y que, por consiguiente, la hipótesis inicial de Vierendeel de despreciar la rigidez de las cabezas, $\kappa_i = \infty$, o la de la modificación posterior $\kappa_i = 1$, que admite cabezas y montantes de igual rigidez, sólo puede admitirse con alguna exactitud cuando los montantes sean más rígidos que las cabezas, o cuando, siendo menos, la diferencia es pequeña.