TEMAS TECNICOS

CIMENTACIONES

por José Luis de León, arquitecto

Amablemente requerido por mi buen amigo y distinguido arquitecto Mariano Nasarre, expongo a la consideración de todos mis compañeros cuantos conocimientos he podido reunir en diferentes libros y revistas sobre cimentaciones en terrenos elásticos, y que en obsequio a la brevedad he de referirme única y exclusivamente a la cimentación del pie derecho sometido a carga centrada (otros casos interesantísimos serían cuando además actuara un momento flector, caso por lo demás muy corriente, y la cimentación corrida de pies derechos sometidos a cargas, momentos y luces iguales o no).

El concepto de elasticidad de un sólido sugiere la idea que sea capaz de volver a su posición primitiva al cesar las causas que produjeron su deformación; por tanto, parece absurdo que los terrenos arenosos tengan un régimen de elasticidad, y sin embargo, la tienen similar a los sólidos homogéneos.

En todo terreno, al actuar una carga por vez primera,

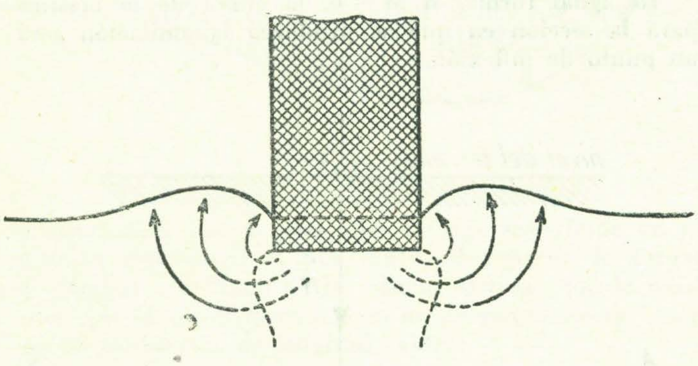

Fig-1

sufre una deformación plástica que dista mucho de ser elástica, pero al reiterar varias veces dicha actuación, se convierte en elástica. Ejemplo de ello son los carriles de una vía férrea que se apoyan sobre traviesas, éstas a su vez sobre piedra machacada, y el conjunto sobre el terreno; pues bien, se observa que cuando la vía lleva cierto tiempo en uso, al pasar un vehículo, el carril desciende, pero vuelve a recuperar su primitiva posición sin deformación apreciable al cesar de actuar la carga, comportándose el terreno como elástico.

En toda cimentación se producen fuerzas verticales y horizontales; las primeras originan asientos, y las otras, corrimientos, y si actúan momentos flectores, giros; contra estas deformaciones debe asegurarse la obra.

Al suponer el terreno elástico, es decir, que las cargas están dentro del régimen de proporcionalidad de las deformaciones, el asiento de una obra depende del módulo del terreno, y la deformación vertical permanente es función principal:

1.° De la resistencia a la refluxión del terreno (fig. 1).

2.° De la compresibilidad del terreno, o sea al aumento de compacidad del mismo.

Se designa por módulo de un terreno a la carga necesaria por cm.² (dentro del límite de proporcionalidad de cargas y deformaciones) para producir el asiento de 1 cm. de profundidad; por consiguiente, designándolo por la letra k, vendrá expresado:

$$k = \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2} : \text{cm} = \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^3}$$

La determinación de k es fácil, pues basta cargar una pequeña superficie al nivel del terreno que se va a cimentar y medir el descenso para tener la relación entre ambos; conviene, para obtener resultados precisos, repetir la operación con diferentes cargas y hallar el límite de proporcionalidad, refiriendo todos los asientos a un punto fijo suficientemente alejado. Un gráfico en el cual se representen las cargas (cuya variación será a tiempos iguales) y las deformaciones dará clara idea de cuanto antecede. Estos ensayos deberán repetirse varias veces y dar como bueno el promedio de los valores obtenidos en diferentes emplazamientos de la cimentación, sin olvidar determinar la profundidad de los estratos del terreno, por lo menos para 1,50 a 2 m. por bajo del nivel sobre el que se va a cimentar la obra.

El asiento admisible en una obra varía entre 40 mm. $> \delta >$ 2 mm., según el efecto que cause en la misma. Si se trata de obras delicadas (sistemas hiperestáticos, grandes arcos, etc.), conviene que $\delta \leqslant 3$ mm.

El coeficiente de trabajo del terreno se deduce de la fórmula

$$\sigma_{\text{terreno}} = k \cdot \delta \qquad [1]$$

siendo k el módulo del terreno determinado por la máquina de ensayo por vibración y δ el asiento admisible para terrenos arcillosos, y

$$\sigma_{\text{terreno}} = \frac{N}{s} \qquad [2]$$

para rocosos o de arena, significando N la carga límite de proporcionalidad y s el grado de seguridad, tomándose para obras corrientes $s = 1{,}5$ y para las sensibles a asientos $2 < s < 3$.

Algunos terrenos, y cuando su profundidad es adecuada, pueden producir en la cimentación reacciones positivas y negativas (fig. 2), en cuyo caso es eficaz toda la longitud AD; pero generalmente la cimentación eficaz no puede rebasar cierto límite (caso en que los terrenos sólo reaccionan en un sentido (fig. 3), siendo por tanto, superfluas las longitudes AB y CD).

A la mayoría de los compañeros interesa fórmulas breves de aplicación práctica; en cambio, algunos necesitan ver claramente la deducción de las mismas, por lo cual este estudio se divide en dos: el teórico para los segundos, y el práctico para los demás.

PARTE TEÓRICA

Hay que empezar por deducir la ecuación diferencial de la elástica de la viga de cimentación.

Suponiendo una carga q por metro, que puede ser constante o variable, y por tanto, conocida la función

$$q_x = f(x)$$

o sea que la intensidad de la carga es función de la abscisa de la sección que se considera; el esfuerzo cortante es:

$$Q_x = \int_0^x q_x\,dx + A_1 = f_1(x) \qquad [3]$$

integrando la [3] se obtiene el momento flector

$$M_x = \int_0^x Q_x\,dx + A_2 = \int_0^x \int_0^x q_x\,dx + C_2 = f_2(x) \qquad [4]$$

para obtener los giros angulares de la viga se integra la [4], aunque dividida por el producto EJ, que si es constante puede salir fuera de la integral

$$\varphi_x = \int_0^x \frac{M_x}{EJ}\,dx + A_3 = \int_0^x \int_0^x \int_0^x \frac{q_x}{EJ}\,dx + C_3 = f_3(x) \qquad [5]$$

En fin, integrando la [5] se obtiene la ecuación de la línea elástica

$$y_x = \int_0^x \varphi_x\,dx + A_4 = \int_0^x \int_0^x \int_0^x \int_0^x \frac{q_x}{EJ}\,dx + C_4 = f_4(x) \qquad [6]$$

Procediendo a la inversa, es decir, partiendo de la ecuación de la línea elástica

$$y_x = f_4(x) \qquad [7]$$

derivándola, se tiene la ecuación de la línea que delimita el diagrama de los giros angulares

$$\varphi_x = \frac{dy_x}{dx} = \frac{df_4(x)}{dx} = f_3(x) \qquad [8]$$

para la sección que tiene mayor descenso, $y_{\text{máx}}$, el giro es cero, o sea para el máximo de la función [7] con tangente paralela al eje de la viga, si se deriva la [8] y se multiplica por el factor EJ se obtiene el momento flector

$$M_x = EJ\,\frac{d\varphi_x}{dx} = EJ\,\frac{d^2 y_x}{dx^2} = f_2(x) \qquad [9]$$

derivando la [9] se obtiene el esfuerzo cortante

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = EJ\,\frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} = EJ\,\frac{d^3 y_x}{dx^3} = f_1(x) \qquad [10]$$

para la sección en que $Q = 0$ se tiene $M_{\text{máx}}$ y el punto de la curva que delimita el diagrama de giros angulares será de inflexión.

De igual forma, si $M = 0$, la curva de la elástica para la sección en que se produzca la anulación será un punto de inflexión.

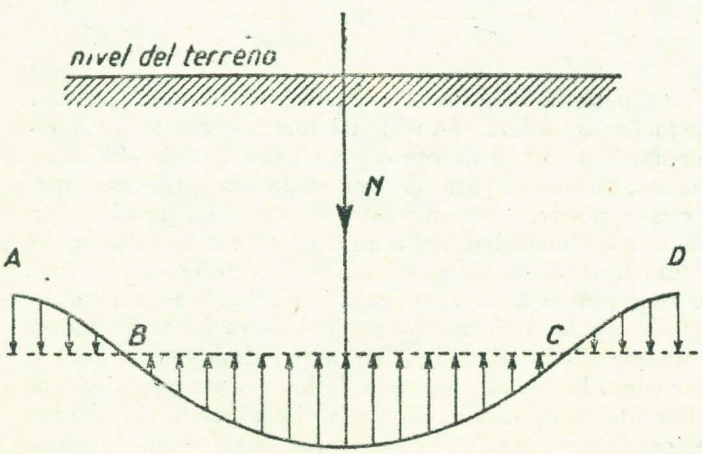

Fig-2

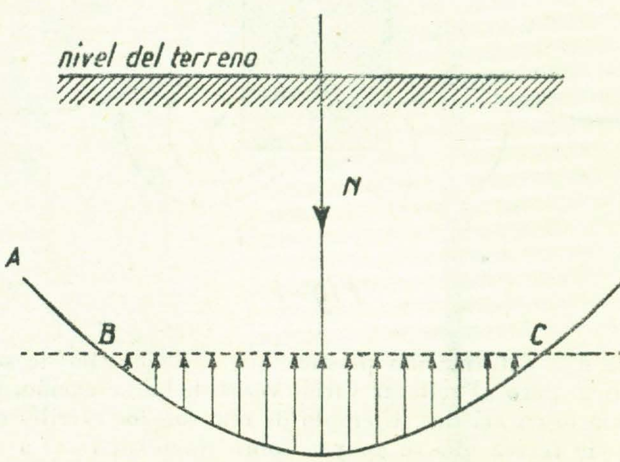

Fig-3

En fin,

$$q_x = \frac{dQ_x}{dx} = \frac{d^2M_x}{dx^2} = EJ\,\frac{d^3\varphi_x}{dx^3} = EJ\,\frac{d^4y_x}{dx^4} = f(x) \quad [11]$$

La figura 4 aclara lo expuesto.

Suponiendo ahora una viga de longitud L y de ancho b, de tal forma que b sea relativamente pequeño en

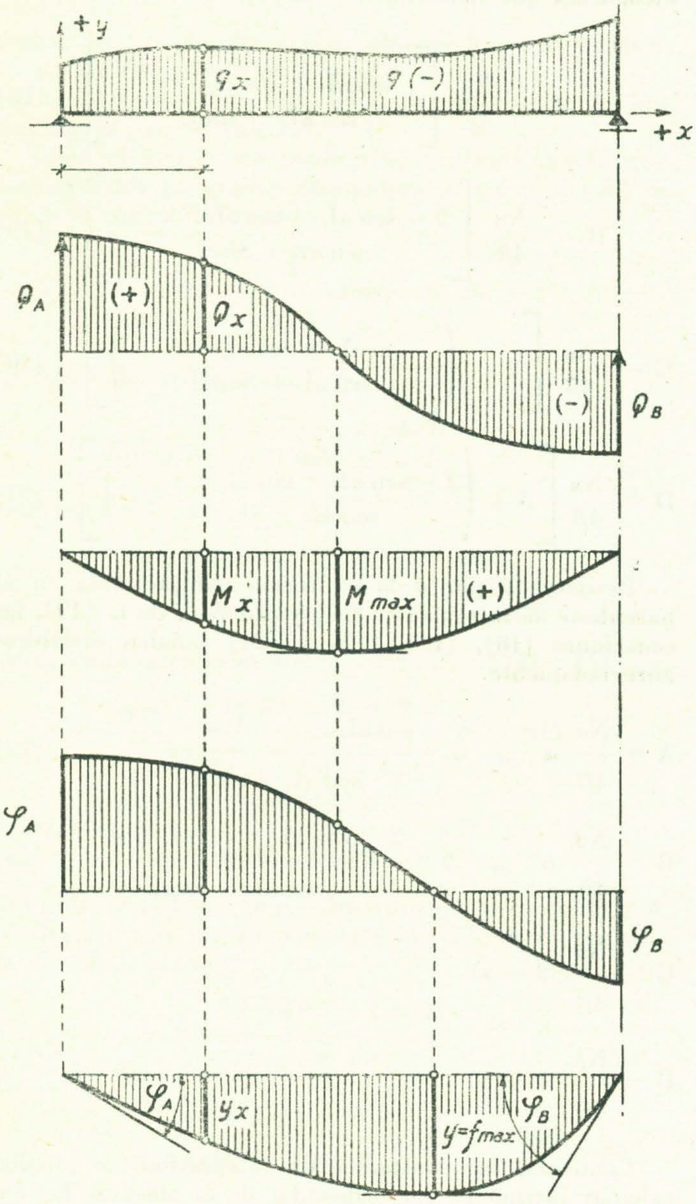

Fig-4

comparación con L para que la viga sea rígida en el sentido transversal y, por tanto, el reparto de cargas se efectúe a lo largo de la misma, se tiene que la reacción que ejerce el terreno para un asentamiento de 1 cm. en un centímetro de longitud valdrá:

$$R = \beta = k \,.\, b \,.\, 1$$

pero si el descenso es y, entonces

$$r = \beta \,.\, y$$

si la viga tiene una carga de intensidad q en sentido descendente (fig. 5), la fuerza que actúa en la viga por unidad de longitud es:

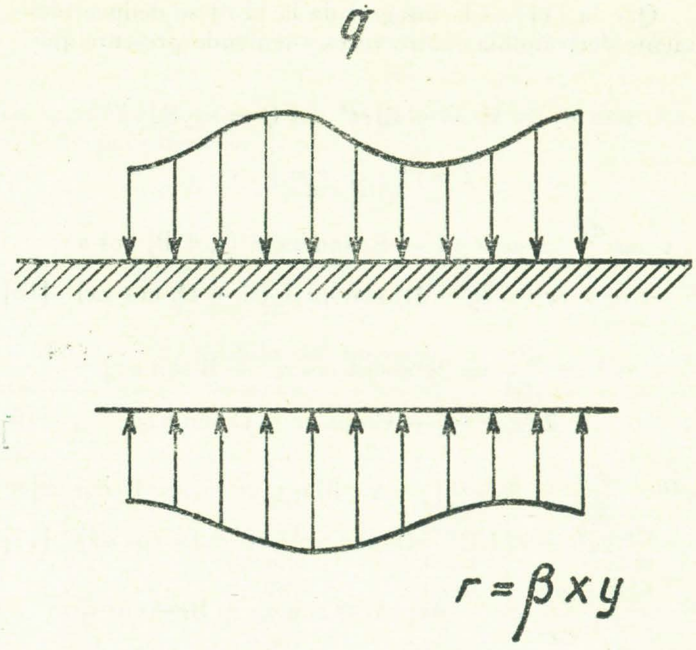

Fig-5

$$q - r = q - \beta \,.\, y$$

si además es de sección uniforme y material isótropo (EJ constante), la [11] puede escribirse

$$EJ\,\frac{d^4y}{dx^4} = q - \beta \,.\, y$$

o

$$EJ\,\frac{d^4y}{dx^4} + \beta y = q \quad [12]$$

si EJ fuera variable, entonces podría escribirse

$$\frac{d^2\,(EJ \,.\, y'')}{dx^2} + \beta \,.\, y = q$$

donde y'' es la ordenada de la curva de los momentos flectores.

Para $q = 0$ y poniendo $\alpha^4 = \dfrac{\beta}{4EJ}$ la [12] se transforma en:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4\alpha^4 y = 0 \quad [13]$$

o

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -4\alpha^4 y \quad [13']$$

la integral general de esta ecuación es:

$$y = Ae^{\alpha x}\,\text{sen}\,\alpha x + Be^{\alpha x}\cos\alpha x + Ce^{-\alpha x}\,\text{sen}\,\alpha x + De^{-\alpha x}\cos\alpha x \quad [14]$$

A, B, C y D son las constantes de integración que se determinan para cada caso particular.

Que la [14] es la integral de la [13′] se deduce fácilmente derivándola cuatro veces y teniendo presente que

$$\varphi = y^{I} \;,,\; M = -\,EJy^{II} \;,,\; Q = -\,EJy^{III} \;,,$$

$$f = y^{IV} \;,,\; r = \beta \,.\, y$$

$$y^{I} = \frac{dy}{dx} = \alpha e^{\alpha x}\left[(A - B)\ \text{sen}\ \alpha x + (A + B)\cos \alpha x\right] + \alpha e^{-\alpha x}\left[-(C + D)\ \text{sen}\ \alpha x + (C - D)\cos \alpha x\right] \quad [15]$$

$$y^{II} = \frac{d^2y}{dx^2} = 2\alpha^2 e^{\alpha x}\left[A\cos \alpha x - B\ \text{sen}\ \alpha x\right] + 2\alpha^2 e^{-\alpha x}\left[-\,C\cos \alpha x + D\ \text{sen}\ \alpha x\right] \quad [16]$$

$$y^{III} = \frac{d^3y}{dx^3} = 2\alpha^3 e^{\alpha x}\left[-(A + B)\ \text{sen}\ \alpha x + (A - B)\cos \alpha x\right] + 2\alpha^3 e^{-\alpha x}\left[(C - D)\ \text{sen}\ \alpha x + (C + D)\cos \alpha x\right] \quad [17]$$

$$y^{IV} = \frac{d^4y}{dx^4} = -\,4\alpha^4\left[Ae^{\alpha x}\ \text{sen}\ \alpha x + Be^{\alpha x}\cos \alpha x + Ce^{-\alpha x}\ \text{sen}\ \alpha x + De^{-\alpha x}\cos \alpha x\right]$$

valor que concuerda con la [13′].

Como lo interesante es deducir fórmulas para vigas de longitud finita, se tratará en este artículo únicamente para la actuación de una carga centrada (fig. 6).

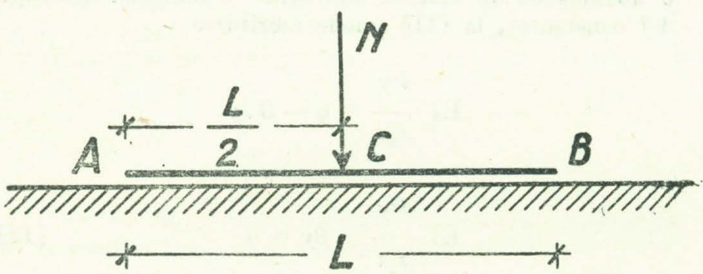

Fig-6

Sea pues, una viga de longitud L en la cual actúa en su punto medio una carga N.

La deducción de las constantes A, B, C y D para este caso, de la ecuación de la línea elástica [14] se deducen fácilmente haciendo origen de coordenadas el punto C de aplicación de la fuerza N, se tiene pues:

a) Para $x = 0$

$y' = 0$ Punto de inflexión de los giros angulares, o sea la ecuación [15] para ese valor de x se iguala a cero.

$Q = -\,EJy''' = -\dfrac{P}{2}$ como se considera el origen en C, el esfuerzo cortante vale $-\dfrac{P}{2}$ luego a este valor habrá que igualar la [17].

b) Para $x = \dfrac{L}{2}$

$M = -\,EJy'' = 0$ momento nulo en los extremos A y B, luego para dicho valor de la variable la [16] se anula.

$Q = -\,EJy''' = 0$ también en los extremos A y B el esfuerzo cortante se anula, luego la [17] también es igual a cero para este valor x.

En resumen: se tienen cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, que debidamente despejadas dan:

$$A = \frac{N\alpha}{4\beta}\left[\frac{\text{sen}\ \alpha L + \cos \alpha L - e^{-\alpha L}}{\text{sen}\ \alpha L + Sh\alpha L}\right] \quad [18]$$

$$B = \frac{N\alpha}{4\beta}\left[\frac{2 - \text{sen}\ \alpha L + \cos \alpha L + e^{-\alpha L}}{\text{sen}\ \alpha L + Sh\alpha L}\right] \quad [19]$$

$$C = \frac{N\alpha}{4\beta}\left[2 - \left(\frac{\text{sen}\ \alpha L + \cos \alpha L - e^{-\alpha L}}{\text{sen}\ \alpha L + Sh\alpha L}\right)\right] \quad [20]$$

$$D = \frac{N\alpha}{4\beta}\left[2 + \left(\frac{2 - \text{sen}\ \alpha L + \cos \alpha L + e^{-\alpha L}}{\text{sen}\ \alpha L + Sh\alpha L}\right)\right] \quad [21]$$

Designando por a la expresión comprendida en el paréntesis de la ecuación [18] y por b la de la [19], las ecuaciones [18], [19], [20] y [21] pueden escribirse abreviadamente

$$A = \frac{N\alpha}{4\beta}a \quad ,, \quad a = \frac{\text{sen}\ \alpha L + \cos \alpha L - e^{-\alpha L}}{\text{sen}\ \alpha L + Sh\alpha L} \quad [22]$$

$$B = \frac{N\alpha}{4\beta}b \quad ,, \quad b = \frac{2 - \text{sen}\ \alpha L + \cos \alpha L + e^{-\alpha L}}{\text{sen}\ \alpha L + Sh\alpha L} \quad [23]$$

$$C = \frac{N\alpha}{4\beta}(2 - a)$$

$$D = \frac{N\alpha}{4\beta}(2 + b)$$

Conocidas las constantes de integración, se pueden calcular fácilmente las ordenadas de la elástica, los ángulos de giro, los momentos flectores, los esfuerzos cortantes y la reacción del terreno por unidad de longitud, es decir, las y, φ, M, Q, q y r para cualquier punto de la viga de cimentación.

Son interesantes obtener las flechas o asientos en el punto medio y en los extremos de los voladizos, así como el momento máximo en C; estos valores se deducen inmediatamente.

En el origen de las coordenadas, punto de actuación de N, se tiene:

$$y_{\frac{L}{2}} = \frac{N\alpha}{2\beta}(1 + b) \quad [24]$$

$$M_{max} = \frac{N}{4\alpha}(1 - a) \quad [25]$$

y en los extremos A y B

$$y_a = y_b = \frac{N\alpha}{2\beta}\, c \qquad [26]$$

siendo:

$$c = \frac{4 \cos \frac{\alpha L}{2}\, Ch \frac{\alpha L}{2}}{\text{sen}\, \alpha L + Sh\alpha L} \qquad [27]$$

fáciles, aunque pesados, son de obtener los coeficientes a, b y c para diversos valores de αL.

Como ejemplo de aplicación se determinan dichos coeficientes para el valor $\alpha L = 1$.

Como el arco viene medido en radianes, habrá que transformarlo en grados sexagesimales, para lo cual se aplica la conocida fórmula

$$\alpha^o = \frac{\alpha L}{\pi} 180^o = \frac{1}{3{,}14} 180^o = 57{,}30^o = 57^o\, 18'$$

por otro lado, se tiene que:

$$e^{\alpha L} = Ch\alpha L + Sh\alpha L$$
$$e^{-\alpha L} = Ch\alpha L - Sh\alpha L$$

luego para $\alpha L = 1$:

$$\text{sen}\, \alpha L = \text{sen}\, 57^o\, 18' = \infty\, 0{,}8417$$
$$\cos \alpha L = \cos 57^o\, 18' = \infty\, 0{,}5397$$
$$e^{-\alpha L} = Ch\, 1 - Sh\, 1 = \infty\, 0{,}3679$$

sustituyendo estos valores en las fórmulas [22] y [23]

$$a = \frac{0{,}8417 + 0{,}5397 - 0{,}3679}{0{,}8417 + 1{,}1752} = \infty\, 0{,}5025$$

$$b = \frac{2 - 0{,}8417 + 0{,}5397 + 0{,}3679}{0{,}8417 + 1{,}1752} = \infty\, 1{,}0243$$

para obtener el valor de c se ha utilizado la tabla núm. 4 del Hütte y que da directamente los valores de sen αL, cos αL, $Sh\alpha$L y $Ch\alpha$L

$$c = \frac{4 \cos 0{,}5 \times Ch\, 0{,}5}{\text{sen}\, 1 + Sh\, 1} =$$

$$= \frac{4 \times 0{,}87758 \times 1{,}12763}{0{,}84147 + 1{,}17520} = \infty\, 1{,}9628$$

Parte práctica.

Si una viga de longitud L, ancho b, con EJ constante, está asentada en un terreno de módulo k, está sujeta en su punto medio a una carga N (fig. 6), los valores de las ordenadas de la elástica en $\frac{L}{2}$ y en los puntos A y B, así como el valor del momento máximo, vienen expresados por las fórmulas [24], [25] y [26]:

$$y = \frac{N\alpha}{2\beta}(1 + b) \qquad [24]$$

$$M_{max} = \frac{N}{4\alpha}(1 - a) \qquad [25]$$

$$y_A = y_B = \frac{N\alpha}{2\beta}\, c \qquad [26]$$

en la tabla siguiente se dan los valores de los coeficientes a, b y c para diversos de αL:

a, *b*, y *c*, coeficientes.

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{\beta}{4EJ}} \quad ,, \quad \beta = k\,.\,b.$$

k, módulo del terreno.

αL	a	b	c
0,0	1,0000	∞	∞
0,05	0,9750	39,0000	40,0000
0,1	0,9500	19,0000	20,0200
0,5	0,7498	3,0030	3,9954
1,0	0,5028	1,0249	1,9628
π/2	0,2400	0,3659	1,1349
2	0,0790	0,1785	0,7352
3	—0,0885	0,0904	0,0657
π	—0,0900	0,0900	0,0000
4	—0,0538	0,0800	—0,2360
5	—0,0094	0,0444	—0,2684
6	0,0034	0,0161	—0,1984
2π	0,0038	0,0112	—0,1732
	0,0000	0,0000	0,0000

teniendo en cuenta las expresiones [24] y [26] con los valores de la tabla, se deduce que

$$y_{\frac{L}{2}} = y_a = y_b \qquad (a)$$

sensiblemente hasta que $\alpha L = 1$, de donde se deduce

$$\alpha = \frac{1}{L} \qquad (b)$$

el valor de α es la inversa de una longitud y vendrá expresada en cm^{-1} y recordando además, según se ha expuesto, que

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{\beta}{4EJ}}$$

sustituyendo α por su valor en (b) se tiene

$$\sqrt[4]{\frac{\beta}{4EJ}} = \frac{1}{L}$$

o sea, para que se verifique la (a) precisa que

$$L = \frac{1}{\alpha} = \sqrt[4]{\frac{4EJ}{\beta}} = \sqrt[4]{\frac{4EJ}{k\,.\,b}} \qquad (c)$$

la ecuación (c) es homogénea

$$L = \sqrt[4]{\frac{\frac{kg}{cm^2}\, cm^4}{\frac{kg}{cm^3}\, cm}} = \sqrt[4]{\frac{cm^2}{\frac{1}{cm^2}}} = \sqrt[4]{cm^4} = cm$$

También indica la tabla que el valor del momento flector cambia de signo para $\alpha = \infty 3 = \infty 3{,}14 = \pi$; luego si la longitud de la viga es mayor a $\frac{\pi}{\alpha}$ resultan superfluos los excesos de longitud (fig. 7).

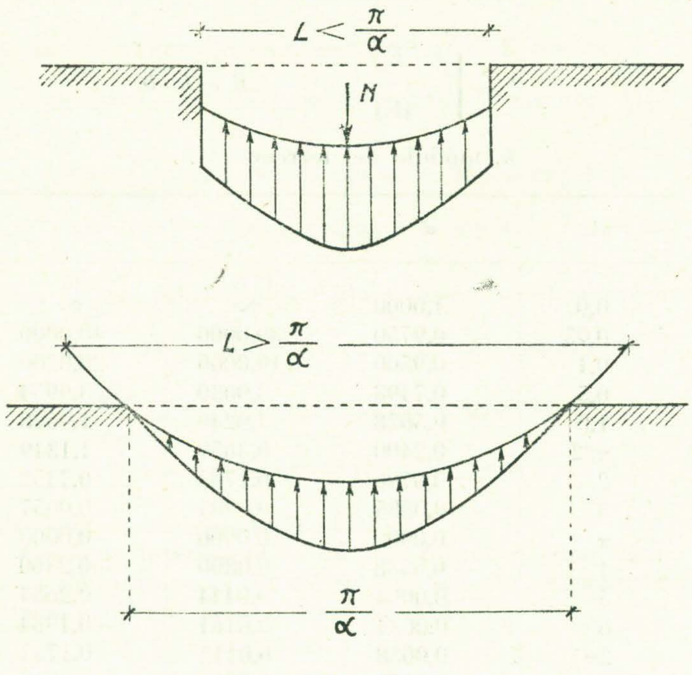

Fig-7

Como aplicación de lo expuesto anteriormente, a continuación se expone un caso práctico.

EJEMPLO: Viga de madera de sección $F = 20 \times 40$ cm., de longitud 4 m., apoyada sobre un terreno de un módulo $k = 6$ kg./cm.³ y que soporta una carga en su punto medio de $N = 5.000$ kg. Se pide: 1.° Determinar el descenso en $\frac{L}{2}$ y en los extremos, el momento en el punto de aplicación de la fuerza y los coeficientes de trabajo máximos de la madera y del terreno. 2.° Hallar la longitud necesaria para que el reparto de tensiones sea uniforme, determinando el asiento, el momento en el punto medio y el trabajo máximo de la madera y del terreno.

1.° Como el ancho de la viga $b = 20$ cm.; $\beta = k \cdot b = 6 \times 20 = 120$ kg./cm²

El momento de inercia de la sección vale

$$J = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \times 40^3}{12} = 106.666 \text{ cm.}^4$$

y $E = 100.000$ kg./cm.²; de donde se deduce

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{120}{4 \times 100.000 \times 106.666}} = 0{,}0072791 \text{ cm.}^{-1}$$

$$\alpha L = 2{,}91 < \pi$$

El asiento máximo en el punto de aplicación de la fuerza N vale, según [24] y teniendo en cuenta los valores de los coeficientes dados en la tabla:

$$y_{\frac{L}{2}} = \frac{5.000 \times 0{,}0072791}{2 \times 120} (1 + 0{,}0904) = 0{,}163 \text{ cm.}$$

y el momento en dicho punto [25]

$$M = \frac{5.000}{4 \times 0{,}0072791} (1 - 0) = 171.700 \text{ cm./kg.}$$

el momento resistente de la viga vale

$$W = \frac{2 \times 106.666}{40} = 5.233 \text{ cm.}^3$$

el coeficiente de trabajo máximo de la madera es

$$\sigma = \frac{171.700}{5.333} = 32 \text{ kg./cm.}^2$$

la carga máxima por unidad de longitud de la viga

$$r_{\max} = \beta \cdot y_{\frac{L}{2}} = 19{,}6 \text{ kg./cm.}$$

y la fatiga máxima del terreno

$$\sigma = \frac{19{,}6}{20} = 0{,}98 \text{ kg./cm.}^2$$

como se ve, el reparto no es uniforme, pues

$$L \times \beta \times \sigma_t = 6.840 \text{ kg.} > N = 5.000 \text{ kg.}$$

2.° Para obtener la uniformidad de presiones sobre el terreno precisa que se cumpla

$$\alpha L = 1$$

de donde se deduce la longitud de la viga

$$L = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0{,}0072791} = 137 \text{ cm.}$$

el asiento máximo vale

$$y_{\frac{L}{2}} = \frac{5.000 \times 0{,}0072791}{2 \times 120} (1 + 1{,}0248) = 0{,}307 \text{ cm.}$$

y el momento flector valdrá

$$M = \frac{5.000 (1 - 0{,}5028)}{4 \times 0{,}0072791} = 85381 \text{ cm./kg.}$$

el trabajo en la madera

$$\sigma = \frac{85.381}{5.333} = 16 \text{ kg./cm.}^2$$

la carga máxima por unidad de longitud de la viga

$$r_{\max} = 120 \times 0{,}307 = 36{,}84 \text{ kg./cm.}$$

y la fatiga máxima del terreno

$$\sigma = \frac{36{,}84}{20} = 1{,}84 \text{ kgs./cm.}^2$$

comprobación

$$L \cdot b \cdot \sigma_t = 5042 = \infty 5.000 \text{ kg.}$$

Nota: Por olvido involuntario del delineante se omitió indicar en la fig. 4, el dibujo superior se refiere a diagrama de carga; la abcisa es x; el segundo esfuerzos cortantes, el tercero momentos flectores, el cuarto giros angulares y falta indicar φ_x, la escala de giros se refiere a radianes y la quinta es la elástica.