

Por José Luis de León, Arquitecto

Es frecuente efectuar el cálculo de estas vigas como si el larguero AF (fig. 1) fuese una viga continua con apoyos intermedios B, C, D, E, no desplazables verticalmente; y, sin embargo, nada más lejos de la realidad, pues intuitivamente se ve que al cargar la viga, los puntos B, C, D, E, deben descender, por lo cual varía notablemente las magnitudes de los momentos en dichos puntos; incluso pueden cambiar de signo, teniendo, por tanto, especial importancia cuando el cordón superior es de hormigón armado.

Un ejemplo pondrá en evidencia lo anteriormente expuesto:

Sea la viga dibujada en la figura 1, en la cual el larguero y los montantes son de madera, con una escuadría el primero de 14 x 28 cm., y los segundos de 10 x 10 cm., en cambio el tirante es un redondo de 25 mm. de diámetro. Dicha viga armada soporta una carga uniformemente repartida de 1.000 Kgs/ml., y se trata de determinar los esfuerzos en las diferentes barras y las flechas en los puntos B y C. Los montantes están articulados en el larguero y en el tirante.

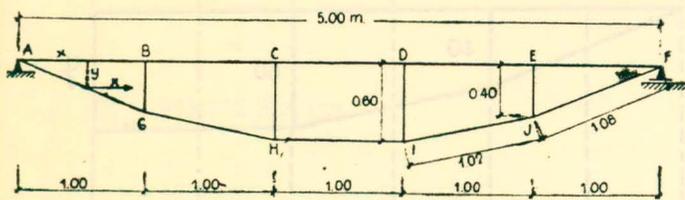


FIG. 1

Suponiendo primeramente que el larguero sin refuerzos de montante y tirantes soporta toda la carga, se tiene:

$$Q = 5.000 \text{ kgs.} \quad b = 14 \text{ cm.}$$

$$p = 1.000 \text{ kgs.} \quad h = 28 \text{ cm.}$$

$$J = \frac{14 \times 28^3}{12} = 25.610 \text{ cm}^4$$

$$W = \frac{25.610 \times 2}{28} = 1.830 \text{ cm}^3$$

$$M_{max} = \frac{5.000 \times 5,00}{8} \times 100 = 312.500 \text{ cm/Kg.}$$

$$\sigma_{max} = \frac{312.500}{1.830} = 170 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f = \frac{5}{384} \frac{Q L^3}{E J} = 3,178 \text{ cm.}$$

de forma que el trabajo máximo es de 170 Kg/cm² y la flecha en el centro del vano de 3,178 cm., habiendo tomado como módulo de elasticidad de la madera E = 100.000 kilogramos/cm².

Para reducir el coeficiente de trabajo precisa el refuerzo de la misma, y una de las soluciones puede ser la indicada en la figura 1.

Al armar la viga se tiene una estructura hiperestática de primer grado, pues conociendo el valor de la tracción del tirante el problema estará resuelto; para ello se puede recurrir a la deformación.

El trabajo molecular de un prisma de dimensiones conocidas, prescindiendo del esfuerzo transversal y de la variación de temperatura, vale:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2 dl}{E F} + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2 dl}{E J} \quad (1)$$

Ahora bien, la derivada del trabajo respecto a la acción interior (en este caso, la incógnita X es la componente horizontal de la tracción del tirante) es mínimo. Luego si en la (1) se sustituye dl por dx, se deriva con respecto a X y se iguala a cero, se tiene:

$$\frac{dT}{dX} = 0 = \int_0^L \frac{N}{E F} \frac{\partial N}{\partial X} dx + \int_0^L \frac{M}{E J} \frac{\partial M}{\partial X} dx \quad (2)$$

Pero $\int_0^L \frac{N^2 dl}{E F}$ de la (1) se descompone en dos, una para el larguero y otra para el tirante (prescindiendo del trabajo de deformación de los montantes); pero esta última será la

$$\Sigma \frac{S^2 s}{E, F,}$$

en la que S representa el esfuerzo de tracción en cada trozo de tirante AG, GH, HL, IJ, JF; s, las longitudes respectivas; E, el módulo de elasticidad del metal (2.100.000 Kg/cm²), y F, la sección del redondo, de forma que la (2) se transforma

$$\int_0^L \frac{N}{E F} \frac{\partial N}{\partial X} dx + \Sigma \frac{S s}{E, F,} \frac{\partial S}{\partial X} + \int_0^L \frac{M}{E J} \frac{\partial M}{\partial X} dx = 0 \quad (3)$$

por ser la incógnita X una compresión en el cordón superior, se tendrá:

$$N = - X \quad \frac{\partial N}{\partial X} = - 1$$

$$M = M_0 - Xy \quad \frac{\delta M}{\delta X} = -y$$

en donde M_0 es el momento isostático de la viga AF simplemente apoyada, prescindiendo de la armadura.

Por otra parte se tiene:

$$\sum_0^L \frac{Ss}{E_1 F_1} \frac{\delta S}{\delta X} = \frac{X}{E_1 F_1} \left(2 \frac{s_1^3}{l_1^2} + 2 \frac{s_2^3}{l_2^2} + s \right) \quad (4)$$

por ser

$$S_1 = X \frac{s_1}{l_1} \quad \frac{\delta S_1}{\delta X} = \frac{s_1}{l_1}$$

$$S_2 = X \frac{s_2}{l_2} \quad \frac{\delta S_2}{\delta X} = \frac{s_2}{l_2}$$

$$S_3 = X \quad \frac{\delta S_3}{\delta X} = 1$$

Además:

$$l = l_1 = l_2 = l_3 = 100 \text{ cm.}$$

$$s_1 = 108 \text{ cm.}$$

$$s_2 = 102 \text{ cm.}$$

$$s_3 = l_3 = 100 \text{ cm.}$$

la (4) queda reducida

$$\sum_0^L \frac{S \cdot s}{E_1 F_1} \frac{\delta S}{\delta X} = \frac{X}{F_1 E_1} 564$$

sustituyendo los valores en (3)

$$\frac{XL}{EF} + \frac{X}{E_1 F_1} 564 - \frac{1}{EJ} \int_0^L (M_0 - Xy) y dx = 0$$

$$\frac{XL}{EF} + \frac{X}{E_1 F_1} 564 - \frac{1}{EJ} \int_0^L M_0 y dx + \frac{X}{EJ} \int_0^L y^2 dx = 0 \quad (5)$$

Despejando X , y teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{F}{J}$$

$$X = \frac{\frac{1}{\rho^2} \int_0^L M_0 y dx}{L + \frac{1}{\rho^2} \int_0^L y^2 dx + \frac{E F}{E_1 F_1} 564} \quad (6)$$

Examinada esta fórmula se deduce que el numerador depende de la acción de las fuerzas exteriores; en cambio, el de-

nomador es función únicamente de la forma, dimensiones y materiales de la viga armada.

En este caso

$$\frac{l}{\rho^2} = \frac{F}{J} = \frac{392}{25.610} = 0,0153$$

$$F_1 = 4,91 \text{ cm}^2.$$

$$X = \frac{0,0153 \int_0^L M_0 y dx}{500 + 0,0153 \int_0^L y^2 dx + \frac{100.000 \times 392}{2.100.000 \times 4,91} \times 564} \quad (7)$$

Las dos integrales son fáciles de resolver mediante las tablas de integración de Muller-Breslau, pero para ello es preciso conocer los valores de M_0 en B, C, D, E y puntos medios (figura 2).

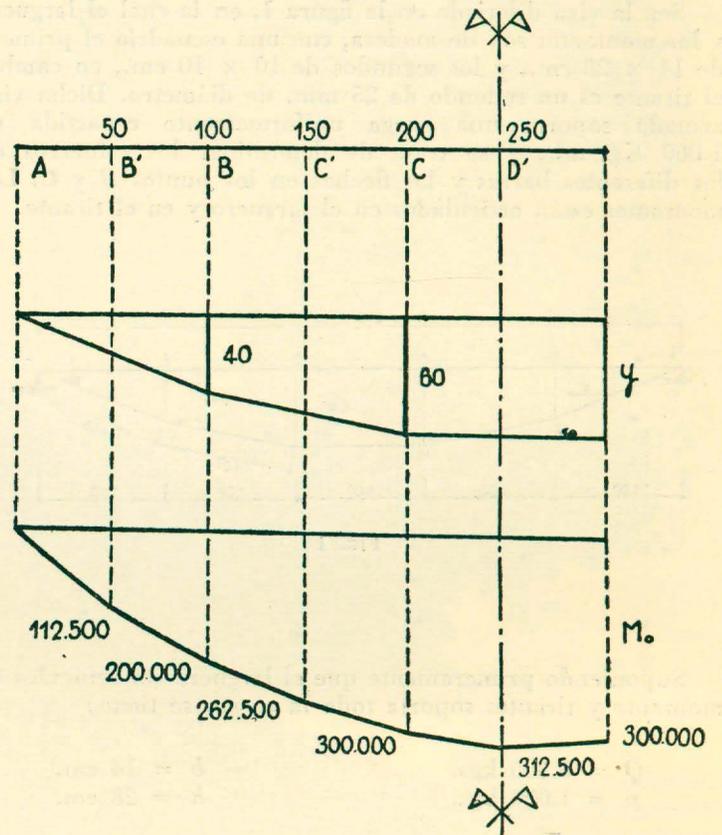


FIG. 2

$$M_{B'} = 2.500 \times 50 - 1.000 \times 0,50 \times 25 = 112.500 \text{ cm. Kg.}$$

$$M_B = 2.500 \times 100 - 1.000 \times 1,00 \times 50 = 200.000 \text{ »}$$

$$M_{C'} = 2.500 \times 150 - 1.000 \times 1,50 \times 75 = 262.500 \text{ »}$$

$$M_C = 2.500 \times 200 - 1.000 \times 2,00 \times 100 = 300.000 \text{ »}$$

$$M_{D'} = 2.500 \times 250 - 1.000 \times 2,50 \times 125 = 312.500 \text{ »}$$

Aplicando la tabla se tiene

$$\int_0^{100} M_0 y dx = \frac{l}{6} h_1 (M_B + 2 M_{B'}) = 283.333.333 \text{ Kg. cm}^3$$

$$\int_{100}^{200} M_0 y dx = \frac{l}{6} [h_1 (M_B + 2 M_C) + h_2 (M_C + 2 M_{C'})] = 1.308.333.333 \text{ Kg. cm}^3.$$

$$\int_{200}^{300} M_O y dx = \frac{l}{6} 2 \left[h_2 (M_e + 2 M_D) \right] = 1.850.000.000 \text{ Kg. cm}^3$$

de donde

$$2 \int_0^{200} M_O y dx = 3.183.333.332 \text{ Kg. cm}^3 .$$

$$\int_0^{500} M_O y dx = 5.033.333.332 \text{ Kg. cm}^3 .$$

de análoga forma se obtiene la

$$\int_0^L y^2 dx$$

$$\int_0^{100} y^2 dx = \frac{l}{3} h_1^2 = 53.333 \text{ Kg. cm}^2 .$$

$$\int_{100}^{200} y^2 dx = \frac{l}{6} (h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) = 253.333 \text{ Kg. cm}^2 .$$

$$\int_{200}^{300} y^2 dx = l \cdot h_2^2 = 360.000 \text{ Kg. cm}^2 .$$

$$\int_0^{500} y^2 dx = 973.332 \text{ Kg. cm} .$$

sustituyendo estos valores en la (7)

$$X = \frac{0.0153 \times 5.033.333.333}{500 + 0.0153 \times 973.332 + \frac{100.000 \times 392}{2.100.000 \times 4,91} \times 564} = 4.392 \text{ Kg.}$$

La determinación de los momentos en la viga armada se deduce fácilmente aplicando la fórmula

$$M = M_O - Xy$$

$$M_B = 1.000 \frac{1 \times 4}{2} - 4.392 \times 0,40 = + 24.300 \text{ cm. Kg.}$$

$$M_C = 1.000 \frac{2 \times 3}{2} - 4.392 \times 0,60 = + 36.500 \text{ »}$$

$$M_{max} = 1.000 \frac{2,50}{2} - 4.392 \times 0,60 = + 49.600 \text{ »}$$

todos ellos positivos y, por consiguiente, muy diferentes a lo que de ordinario se toman

$$M_B = (-0,105) pl^2,$$

$$M_C = (-0,079) pl^2$$

ello presupone, además, que si el cordón superior es de hor-

migón armado, las armaduras en los nudos se colocan incorrectamente.

Los coeficientes de trabajo valen

$$\sigma_B = \frac{X}{F} + \frac{M}{W} = \frac{4.392}{392} + \frac{24.300}{1.830} = 24 \text{ Kg./cm}^2$$

$$\sigma_C = \frac{4.392}{392} + \frac{36.500}{1.830} = 31 \text{ Kg./cm}^2 .$$

$$\sigma_{max} = \frac{4.392}{392} + \frac{49.000}{1.830} = 38 \text{ Kg./cm}^2 .$$

Esfuerzo de compresión en los montantes

$$N = 4.392 \frac{20}{100} = 878 \text{ Kg.}$$

Tracción máxima en el tirante

$$R = \sqrt{4.392^2 + (2 + 878)^2} = 4730 \text{ Kg.}$$

$$\sigma = \frac{4.730}{4,91} = 963 \text{ Kg./cm}^2 .$$

Para la determinación de las flechas en los puntos B y C se puede recurrir al teorema de los trabajos virtuales

$$1 \times f = \int \frac{\bar{M} M dx}{E J} \quad (8)$$

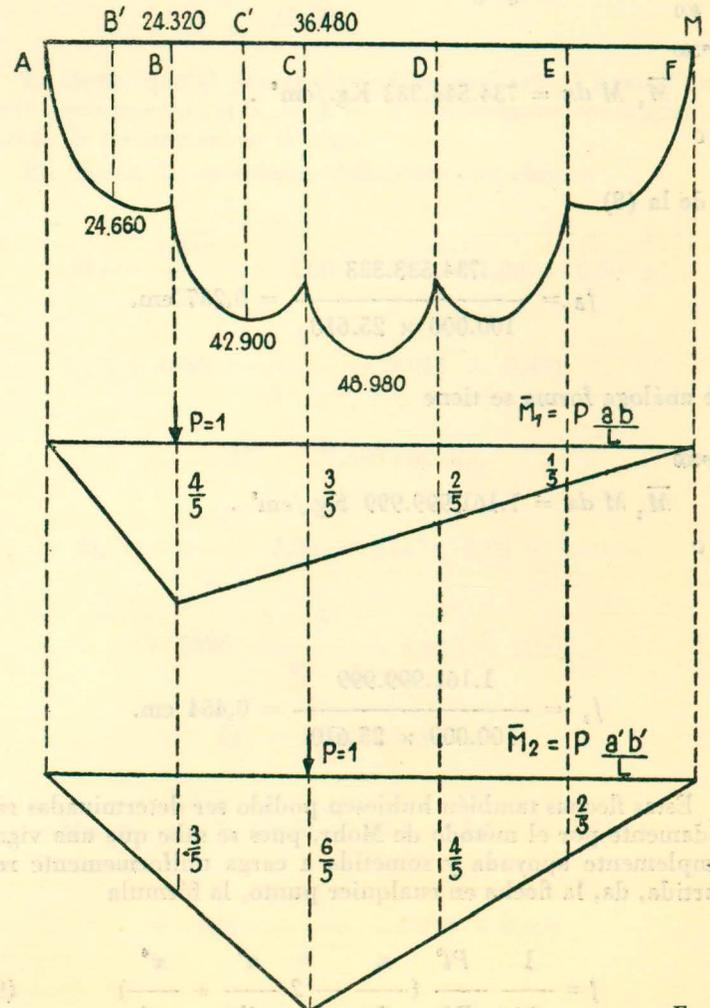


FIG. 3

Para ello hay que determinar además de los momentos en la sección B, C, D' los de los puntos medios de los vanos B', C' (fig. 3).

Aplicando las tablas se tiene:

$$\int_0^{100} \bar{M}_1 M dx = \frac{l}{6} \frac{4}{5} = l (M_B + 2 M_{B'})$$

$$\int_{100}^{200} \bar{M}_1 M dx = \frac{l}{6} l \left[\frac{4}{5} (M_B + 2 M_C) + \frac{3}{5} (M_e + 2 M_{e'}) \right]$$

$$\int_{200}^{300} \bar{M}_1 M dx = \frac{l}{6} l \left[\frac{3}{5} (M_e + 2 M_{D'}) + \frac{2}{5} (M_e + 2 M_{D'}) \right]$$

$$\int_{300}^{400} \bar{M}_1 M dx = \frac{l}{6} l \left[\frac{2}{5} (M_e + 2 M_C) + \frac{1}{5} (M_B + 2 M_C) \right]$$

$$\int_{400}^{500} \bar{M}_1 M dx = \frac{l}{6} \frac{1}{5} l (M_B + 2 M_{B'})$$

$$\int_0^{500} \bar{M}_1 M dx = 734.544.333 \text{ Kg./cm}^3.$$

y de la (8)

$$f_B = \frac{734.533.333}{100.000 \times 25.610} = 0,287 \text{ cm.}$$

de análoga forma se tiene

$$\int_0^{500} \bar{M}_2 M dx = 1.161.999.999 \text{ Kg./cm}^3.$$

y

$$f_2 = \frac{1.161.999.999}{100.000 \times 25.610} = 0,454 \text{ cm.}$$

Estas flechas también hubiesen podido ser determinadas rápidamente por el método de Mohr, pues se sabe que una viga, simplemente apoyada y sometida a carga uniformemente repartida, da, la flecha en cualquier punto, la fórmula

$$f = \frac{1}{24} \frac{Pl^3}{EJ} \left(\frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right) \quad (9)$$

en este caso

$$P = 5 \text{ t.}, l = 5 \text{ m.}, E = 1.000.000 \text{ t/m.}$$

$$J = 0,0002561 \text{ m}^4.$$

para

$$x = 1 \text{ m.}$$

$$f'_B = \frac{1}{24} \frac{P l^3}{EJl^4} (l^3 - 2l + 1)$$

$$f'_B = \frac{5 \times 116}{24 \times 1.000.000 \times 0,0002561 \times 5} = 0,01887 \text{ m.}$$

$$f_B = 1,887 \text{ cm.}$$

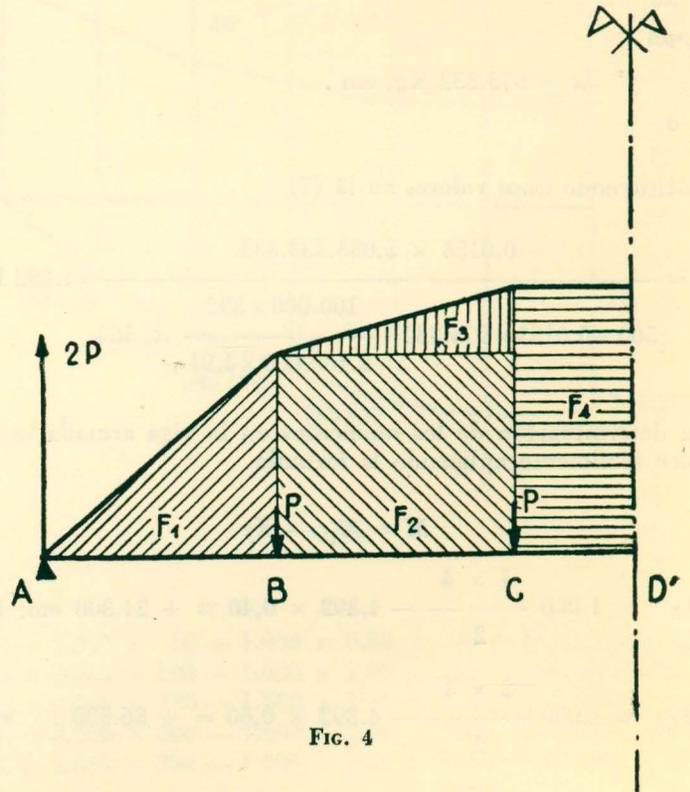
Para

$$x = 2 \text{ m.}$$

$$f'_e = \frac{P}{24 E J l} (2 l^3 - 16 l + 16)$$

$$f'_e = 0,03026 \text{ m.} = 3,026 \text{ cm.}$$

Ahora bien; a estas flechas habrá que restarles las producidas por las fuerzas de los montantes $P = N = 878 \text{ Kg.}$ (fig. 4), ya que éstas actúan sobre el larguero de abajo arriba.



$$M_B = 2 P l$$

$$l = AB = BC = 2CD'$$

$$M_e = 3 P l$$

y las áreas de las superficies de momento son:

$$F_1 = P l^2$$

$$F_2 = 2 P l^2$$

$$F_1 = \frac{P l^2}{2} \quad \Sigma F = P l^2 (1 + 2 + 1/2 + 3/2) = P l$$

$$F_4 = \frac{3 P l^2}{2}$$

las flechas en B y C valen

$$f_B'' = \frac{5 P l^2 \times l - P l^2 \frac{l}{3}}{E J} = 1,6 \text{ cm.} \quad (10)$$

$$f_c'' = \frac{10 P l^2 - P l^2 \left(\frac{4}{3} + 1 + \frac{1}{6}\right)}{E J} = 2,571 \text{ cm.}$$

en definitiva,

$$f_B = f_B' - f_B'' = 0,287 \text{ cm.}$$

$$f_c = f_c' - f_c'' = 0,455 \text{ cm.}$$

para que $f_B = 0$, precisa que exista una tracción X' adicional en el tirante, y para su determinación puede partirse de la fórmula (10).

$$f_B = 0,287 = \frac{14 P l}{3 E J}$$

despejando P

$$P = \frac{3 E J \times 0,287}{14 \times l^2} = 157,5 \text{ Kg.}$$

se deduce

$$X' = 157,5 \frac{100}{20} = 787,5 \text{ Kg.}$$

o sea que la tracción definitiva del tirante vale

$$X = X + X' = 5.179 \text{ Kg.}$$

La comprensión en los montantes será

$$P = P_1 + P_2 = 878 + 157,5 = 1.035,5 \text{ Kg.}$$

y las flechas

$$f_B''' = \frac{14 \times 1.035,5 \times 1.000.000}{3 \times 100.000 \times 25.610} = 1,887 \text{ cm.}$$

$$f_c''' = \frac{135 \times 1.035,5 \times 1.000.000}{18 \times 100.000 \times 25.610} = 3,032 \text{ cm.}$$

$$f_B = f_B' - f_B''' = 0$$

$$f_c = f_c' - f_c''' = 3,026 - 3,032 = -0,006 \text{ cm.}$$

Suponiendo que por cualquier motivo el tirante no actúe

hasta que la viga de madera alcance la flecha de un cm. en su punto medio, la carga que soportará el larguero es

$$Q' = 5.000 \frac{1,000}{3,178} = 1.570 \text{ kg.}$$

con un

$$M_{max} = \frac{1.570 \times 500}{8} = 98.125 \text{ cm./kg.}$$

y

$$\sigma_{max} = \frac{98.125}{1.830} = 54 \text{ kg./cm}^2.$$

quedando como carga para la viga armada

$$Q_2' = 5.000 - 1.570 = 3.470 \text{ kg.}$$

$$q_2' = \frac{3.470}{5,00} = 686 \text{ kg./m. l.}$$

Para determinar la nueva X precisa solamente hallar $\int M$ y dx , puesto que el denominador de la (6) es el mismo

$$\int M \text{ y } dx = 3.452.866.664$$

y

$$X = \frac{3.452.866.664}{17.535} = 3.013 \text{ kg.}$$

Es decir, que si por cualquier imprevisión el tirante está flojo (que es como si $X = X - X'$), disminuye considerablemente la resistencia de la viga.

En efecto, los momentos definitivos son ahora

$$M_B = \frac{1.575}{2} \times 1,00 - 314 \times 1,00 \times 0,50 +$$

$$+ (686 \frac{1 \times 4}{2} - 3.013 \times 0,40)$$

$$M_B = 79.480 \text{ cm./kg.}$$

$$M_c = \frac{1.575}{2} \times 2,00 - 314 \times 2,00 \times 1,00 +$$

$$+ (686 \frac{2 \times 3}{2} - 3.013 \times 0,60)$$

$$M_c = 119.220 \text{ cm./kg.}$$

$$M_{D'} = \frac{1.575}{2} \times 2,50 - 314 \times 2,50 \times 1,25 +$$

$$+ (686 \frac{2,50^2}{2} - 3.013 \times 0,60)$$

$$M_{D'} = 131.720 \text{ cm./kg.}$$

y los coeficientes de trabajo

$$\sigma_B = \frac{3.013}{392} + \frac{79.480}{1.830} = 51 \text{ kg./cm.}$$

$$\sigma_C = \frac{3.013}{392} + \frac{119.220}{1.830} = 73.,$$

$$\sigma_{D'} = \frac{3.013}{392} + \frac{131.720}{1.830} = 80.,$$

Esfuerzo de compresión en el montante

$$N = 3.013 \frac{20}{100} = 602 \text{ kg.}$$

Flechas: aplicando el método de Mohr se tiene para carga uniforme, como siempre

$$f'_B = 1,887 \text{ cm.} \quad f'_c = 3,026 \text{ cm.}$$

para las dos fuerzas $P = 602 \text{ kg.}$

$$f''_B = \frac{14 \times 602 \times 1.000,00}{3 \times 100.000 \times 25.610} = 1,097 \text{ cm.}$$

$$f''_c = \frac{135 \times 602 \times 1.000.000}{18 \times 100.000 \times 25.610} = 1,763 \text{ cm.}$$

flechas definitivas

$$f_B = f'_B - f''_B = 0,790 \text{ cm.}$$

$$f_c = f'_c - f''_c = 1,263 \text{ cm.}$$

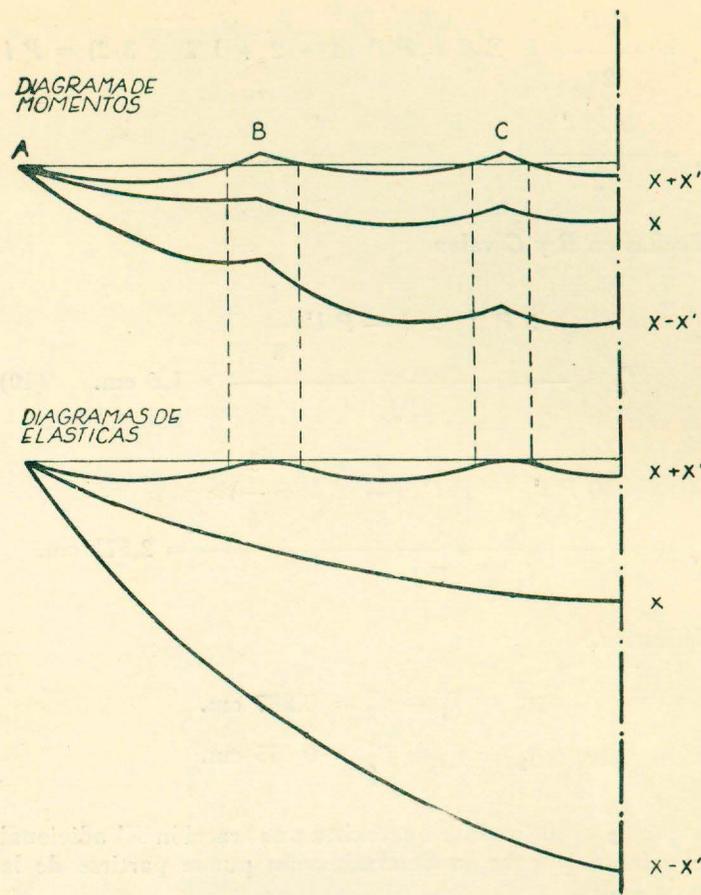


Fig. 5

En la figura 5 puede apreciarse la influencia de X en los momentos flectores y flechas.

CURSOS DE AMPLIACION DE ESTUDIOS DE LA ESCUELA SUPERIOR DE ARQUITECTURA DE MADRID

Primer Cursillo de Jardinería, organizado con la colaboración de la «Sociedad de Amigos del Paisaje y los Jardines».

1.^a Conferencia.—«El Jardín hispano musulmán», por el Profesor don Leopoldo Torres Balbas.

2.^a Conferencia.—«Jardines del Renacimiento en Italia y en España», por D. Miguel Durán, Arquitecto.

3.^a Conferencia.—«El jardín paisajista o inglés», por D. Miguel Durán, Arquitecto.

4.^a Conferencia.—«El medio ambiente y el fin perseguido, factores decisivos en jardinería», por D. Gabriel Bornás y Urcullu, Ingeniero agrónomo y Director General de Agricultura.

5.^a Conferencia.—«Plantación de jardines», por D. Rafael Barrera Riber, Ingeniero Director de la Estación Experimental de Horticultura y Jardinería de Aranjuez.

6.^a Conferencia.—«Conservación de los jardines», por D. Ricardo Pérez Calvet, Ingeniero agrónomo del Instituto de Investigaciones Agronómicas.

7.^a Conferencia.—«Estética de los jardines», por D. Víctor D'Ors Pérez-Peix, Arquitecto del Ayuntamiento de Madrid.

8.^a Conferencia.—«El jardín actual en España», por D. Ramón Aníbal Alvarez, Arquitecto.

9.^a Conferencia.—«Elementos de composición de los jardines», por D. José Muguruza, Arquitecto.

Resumen del Curso, por D. Modesto López Otero, de la Real Academia de San Fernando.

En el salón de reuniones del Museo Romántico, de Madrid, han tenido lugar las conferencias de este Cursillo de Jardinería, desarrolladas con gran competencia por los conferenciantes, y a las que ha asistido numeroso público. Con estas tareas, la Escuela Superior de Arquitectura y la Sociedad de Amigos del Paisaje y los Jardines incorporan con notable acierto a nuestro país al creciente movimiento internacional en favor de la jardinería.